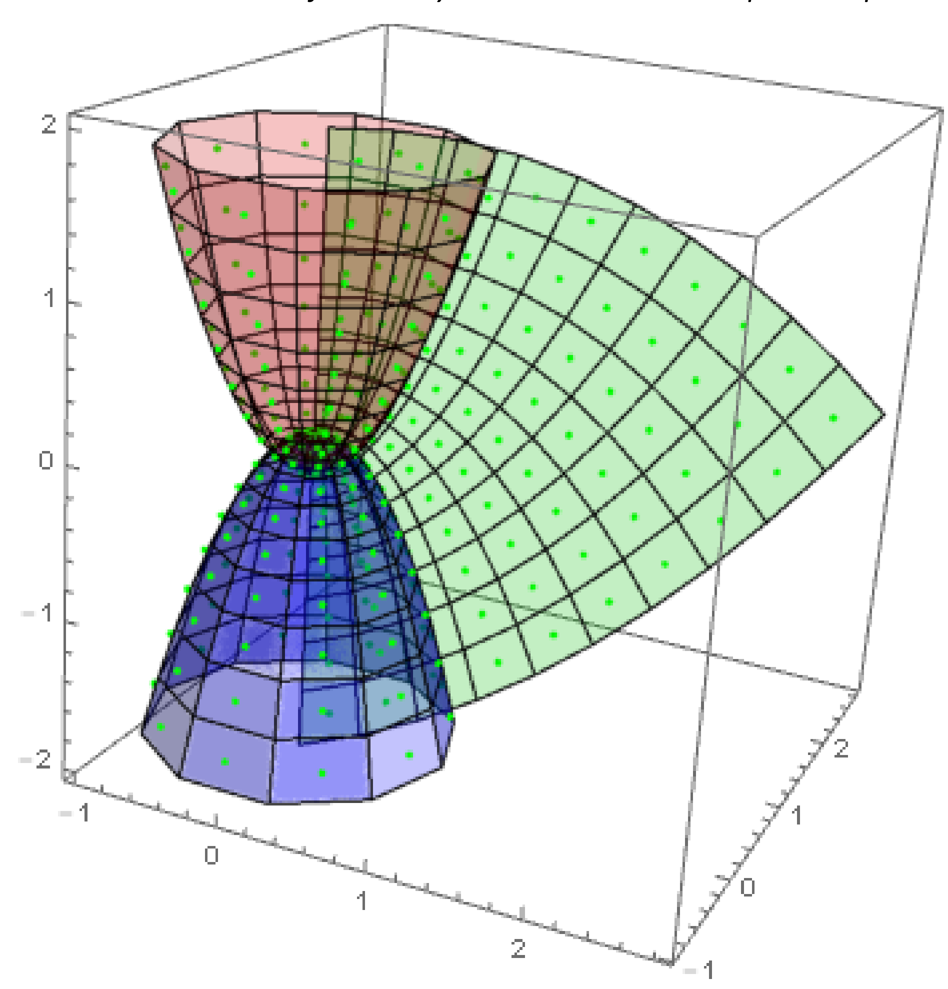
Solution de l'équation de Laplace en coordonnées parabolique de révolution (μ,ν,φ) avec conditions aux limites Dirichlet, Neumann ou Robin par la méthode de séparation des variables

Le système parabolique de révolution (μ,ν,φ) (3D) est défini par le changement de variable :

$$\begin{aligned} x &= a\,\mu\nu\,Cos(\varphi) \\ y &= a\,\mu\nu\,Sin(\varphi) \\ z &= a\,\frac{\mu^2-\nu^2}{2} \\ avec &\quad 0 \le \mu,\nu < +\infty \quad 0 \le \varphi < 2\pi \end{aligned}$$

où a est un facteur d'échelle
φ l'angle de révolution du système de coordonnées

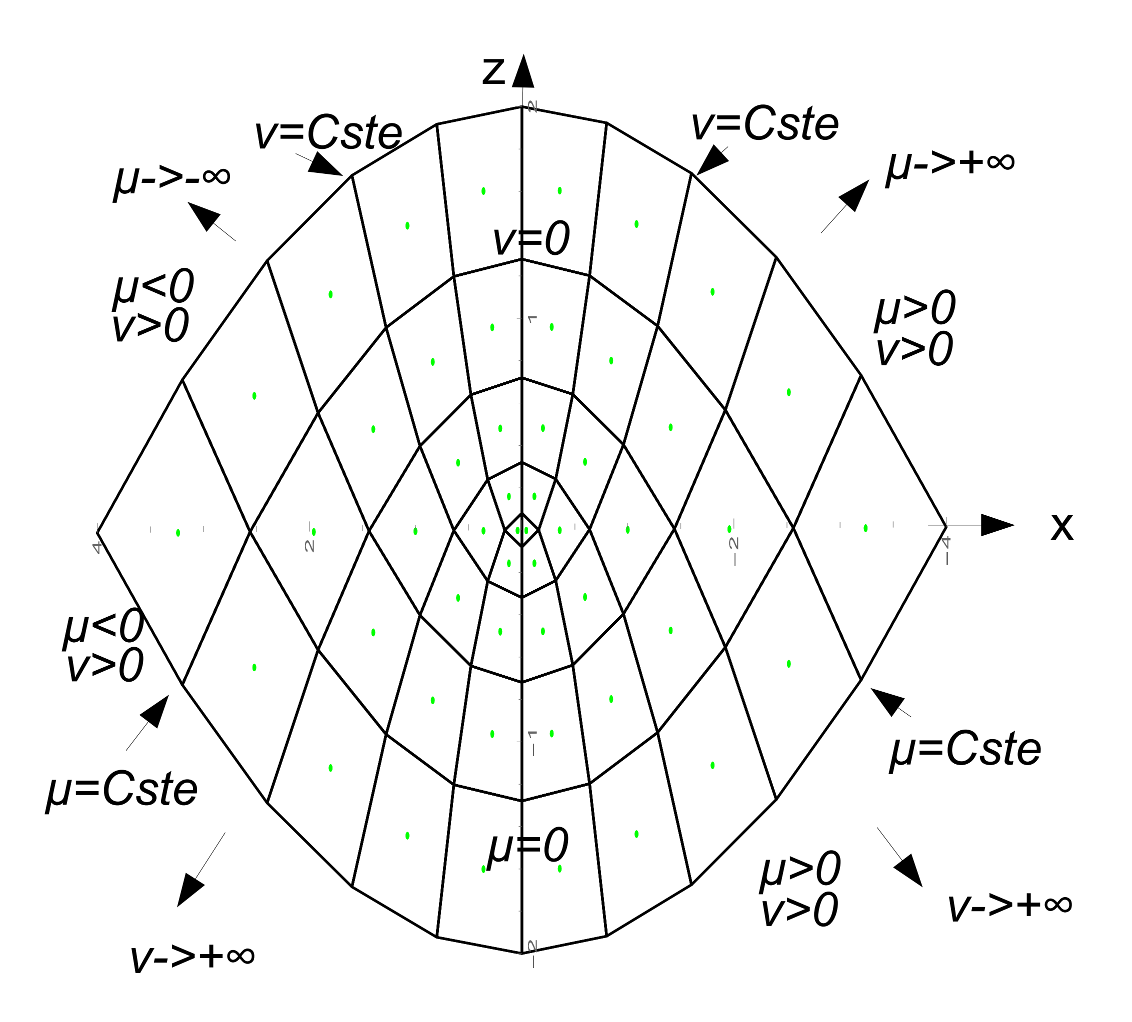
Voici une illustration des trois iso-surfaces du système de coordonnées parabolique de révolution :



En bleu, la surface μ=Cste (paraboloïde de révolution), en rouge la surface ν=Cste (paraboloïde de révolution), et en vert la surface d'angle φ=Cste (demi-plan contenant l'axe z).

Vue en coupe des coordonnées paraboliques de révolution μ , ν, lorsque l'angle φ=0 :

$$x = a\,\mu\nu \quad y = 0 \quad z = a\,\frac{\mu^2 - \nu^2}{2}$$



Typiquement nous recherchons la solution du problème aux limites intérieur en coordonnées parabolique de révolution sur un espace bornée dans les limites :

$\mu \in [0,+\infty]$; $\nu \in [0,+\infty]$; $\varphi \in [0,2\pi]$ *soit* $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$; $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$; $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$

Le Laplacien en coordonnées parabolique cylindrique 3D (*μ,ν,z*) s'écrit sous la forme :

$$\Delta T(\mu,\nu,\varphi) = \frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu^2} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu}\right) + \frac{1}{\mu^2\nu^2}\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \varphi^2}$$

Problème aux limites de Laplace – système de coordonnées paraboliques de révolution -

Le Jacobien en coordonnées paraboliques de révolution et la métrique sont :

$$J = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial x}{\partial \nu} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \nu} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \mu} & \frac{\partial z}{\partial \nu} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = a^3 \det\begin{pmatrix} \nu\, Cos(\varphi) & \mu\, Cos(\varphi) & -\mu\nu\, Sin(\varphi) \\ \nu\, Sin(\varphi) & \mu Sin(\varphi) & \mu\nu\, Cos(\varphi) \\ \mu & -\nu & 0 \end{pmatrix} = -a^3 \mu\, \nu \left(\mu^2 + \nu^2\right)$$

$$ds^2 = \left(\mu^2 + \nu^2\right)\left(d\mu^2 + d\nu^2\right) + \mu^2\nu^2 d\varphi^2$$

Le problème de Laplace peut alors se formaliser de la façon suivante :

$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu^2} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu}\right) + \frac{1}{\mu^2\nu^2}\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$(\mu,\nu,\varphi) \in \Omega \ de\ frontière\ \partial\Omega \quad C.L.\quad \alpha\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \vec{n}} + \beta\, T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\partial\Omega} = f_{\partial\Omega}(\mu,\nu,\varphi)$$

Lorsque les conditions aux limites ne dépendent pas de l'angle de révolution, on réduit le système à 2 dimensions (étude sur un paraboloïde de révolution :

$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial \nu^2} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \nu}\right) = 0$$

$$(\mu,\nu) \in \Omega \ de\ frontière\ \partial\Omega$$

$$C.L.\quad \alpha\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \vec{n}} + \beta\, T(\mu,\nu)\Big|_{\partial\Omega} = f_{\partial\Omega}(\mu,\nu)$$

Le gradient dans ce système de coordonnées prenant la forme :

$$\overrightarrow{Grad\left(T(\mu,\nu,\varphi)\right)} = \frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\left(\left(\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu}\right)\mathbf{I}_\mu + \left(\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu}\right)\mathbf{I}_\nu\right) + \frac{1}{\mu\nu}\left(\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \varphi}\right)\mathbf{I}_z$$

Les conditions mixtes de Robin sur une iso-surface μ=Cste ou ν=Cste (paraboloïdes de révolution),prennent alors la forme :

$$Iso-surface\ \mu = Cste$$

$$C.L.\quad \alpha\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \mu} + \beta\, T(\mu,\nu)\Big|_{\partial\Omega} = f_{\partial\Omega}(\mu,\nu)$$

$$Iso-surface\ \nu = Cste$$

$$C.L.\quad \alpha\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \nu} + \beta\, T(\mu,\nu)\Big|_{\partial\Omega} = f_{\partial\Omega}(\mu,\nu)$$

Singularité du système de coordonnées parabolique de révolution 2D et 3D et régularité du gradient

Dans le cas où le domaine d'étude de la solution de l'équation de Laplace comporte la valeur μ=0 ou ν=0, alors le système de coordonnées parabolique de révolution comporte une singularité en μ=0 ou ν=0. Cela se traduit par l'annulation du Jacobien sur ces valeurs et la singularité "apparente" du Gradient de toute fonction solution de l'équation de Laplace. La solution doit donc neutraliser la singularité apparente du gradient en assurant une valeur bornée à ce dernier soit :

$$(\mu,\nu,\varphi)\in\Omega \ et \ (0,0,\varphi)\in\Omega$$

$$\overrightarrow{Grad\left(T(\mu,\nu,\varphi)\right)}=\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\left(\left(\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}\right)\mathbf{I}_\mu+\left(\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}\right)\mathbf{I}_\nu\right)+\frac{1}{\mu\nu}\left(\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi}\right)\mathbf{I}_z$$

$$G^2=Grad\left(T(\mu,\nu,\varphi)\right)^2=\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\left(\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}\right)^2+\left(\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}\right)^2\right)+\frac{1}{\mu^2\nu^2}\left(\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2$$

$$Singularit\acute{e}\ du\ Jacobien\quad J\big|_{\mu=\nu=0}=\mu^2+\nu^2=0\quad condition\ Grad\left(T(\mu,\nu,\varphi)\right)\ reste\ born\acute{e}e\ \forall\mu,\nu,\varphi$$

Plus précisément

$$Soit\ G^2=\left(\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}\right)^2+\left(\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}\right)^2\Bigg|_{\mu=\nu=0}\propto\left(\mu^2+\nu^2\right)Cste$$

$$Soit\ F^2=\left(\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2\Bigg|_{\mu=\nu=0}\propto\mu^2\nu^2Cste$$

A deux dimensions (μ,ν)

$$Soit\ G^2=\left(\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}\right)^2+\left(\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}\right)^2\Bigg|_{\mu=\nu=0}\propto Cste\left(\mu^2+\nu^2\right)$$

Par la suite on établit que la plupart des solutions des problèmes aux limites se développe en série de produits de fonctions de Bessel de la forme :

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{m}^{+\infty}\sum_{n_\mu}^{+\infty}J_m\left(\lambda_{m,n_\mu}\mu\right)I_m\left(\lambda_{m,n_\mu}\nu\right)\begin{Bmatrix}Cos(m\varphi)\\Sin(m\varphi)\end{Bmatrix}\quad ou\quad T(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{m}^{+\infty}\sum_{n_\nu}^{+\infty}I_m\left(\lambda_{m,n_\nu}\mu\right)J_m\left(\lambda_{m,n_\nu}\nu\right)\begin{Bmatrix}Cos(m\varphi)\\Sin(m\varphi)\end{Bmatrix}$$

On doit donc étudier la singularité autour de l'origine :

$$\text{Développement autour de zéro de}\quad J_m\left(\lambda_{m,n_\mu}\mu\right)I_m\left(\lambda_{m,n_\mu}\nu\right)$$

$$J_\tau(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\tau\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\quad I_\tau(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\tau\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\quad \tau\geq 1\quad \text{avec juste 2 termes}$$

$$J_m\left(\lambda_{m,n_\nu}\mu\right)\approx\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^m\mu^m}{\Gamma(m+1)}\left(\frac{1}{2^m}-\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^2\mu^2}{2^{m+2}(m+1)}\right)\quad I_m\left(\lambda_{m,n_\nu}\nu\right)\approx\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^m\nu^m}{\Gamma(m+1)}\left(\frac{1}{2^m}+\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^2\nu^2}{2^{m+2}(m+1)}\right)$$

$$\left(\frac{dJ_m\left(\lambda_{m,n_\nu}\mu\right)}{d\mu}\right)\approx\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^m\mu^{m-1}}{\Gamma(m+1)}\left(\frac{m}{2^m}-\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^2(m+2)\mu^2}{2^{m+2}(m+1)}\right)\quad\left(\frac{dI_m\left(\lambda_{m,n_\nu}\nu\right)}{d\nu}\right)\approx\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^m\nu^{m-1}}{\Gamma(m+1)}\left(\frac{m}{2^m}+\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^2(m+2)\nu^2}{2^{m+2}(m+1)}\right)$$

$$\left(\frac{dJ_m\left(\lambda_{m,n_\nu}\mu\right)}{d\mu}\right)^2\left(I_m\left(\lambda_{m,n_\nu}\nu\right)\right)^2\approx\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^{4m}\mu^{2(m-1)}\nu^{2m}}{\Gamma(m+1)^4 2^{4m}}\left(m-\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^2(m+2)\mu^2}{4(m+1)}\right)^2\left(1+\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^2\nu^2}{4(m+1)}\right)^2$$

$$\left(J_m\left(\lambda_{m,n_\nu}\mu\right)\right)^2\left(\frac{dI_m\left(\lambda_{m,n_\nu}\nu\right)}{d\nu}\right)^2\approx\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^{4m}\mu^{2m}\nu^{2(m-1)}}{\Gamma(m+1)^4 2^{4m}}\left(1-\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^2\mu^2}{4(m+1)}\right)^2\left(m+\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^2(m+2)\nu^2}{4(m+1)}\right)^2$$

$$\left(\frac{dJ_m\left(\lambda_{m,n_\nu}\mu\right)}{d\mu}\right)^2\left(I_m\left(\lambda_{m,n_\nu}\nu\right)\right)^2+\left(J_m\left(\lambda_{m,n_\nu}\mu\right)\right)^2\left(\frac{dI_m\left(\lambda_{m,n_\nu}\nu\right)}{d\nu}\right)^2\approx$$

$$\approx\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^{4m}\mu^{2(m-1)}\nu^{2(m-1)}}{\Gamma(m+1)^4 2^{4m}}\left(\begin{array}{l}\nu^2\left(m-\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^2(m+2)\mu^2}{4(m+1)}\right)^2\left(1+\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^2\nu^2}{4(m+1)}\right)^2+\\+\mu^2\left(1-\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^2\mu^2}{4(m+1)}\right)^2\left(m+\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^2(m+2)\nu^2}{4(m+1)}\right)^2\end{array}\right)$$

$$\text{Posons } P(\mu,\nu)=\left(\nu^2\left(m-\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^2(m+2)\mu^2}{4(m+1)}\right)^2\left(1+\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^2\nu^2}{4(m+1)}\right)^2+\mu^2\left(1-\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^2\mu^2}{4(m+1)}\right)^2\left(m+\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^2(m+2)\nu^2}{4(m+1)}\right)^2\right)$$

$$P(\mu,i\mu)=0\quad \text{et}\quad P(\mu,-i\mu)=0\Rightarrow\nu=\pm i\mu\quad P(\mu,\nu)=0\quad \text{polynôme}$$

$$\exists\ \text{Factorisation tq } P(\mu,\nu)=(\mu+i\nu)(\mu-i\nu)Q(\mu,\nu)=\left(\mu^2+\nu^2\right)Q(\mu,\nu)\ \text{polynôme en } \mu,\nu$$

$$\Rightarrow G^2\approx\frac{\left(\lambda_{m,n_\nu}\right)^{4m}\mu^{2(m-1)}\nu^{2(m-1)}}{\Gamma(m+1)^4 2^{4m}}\left(\mu^2+\nu^2\right)Q(\mu,\nu)$$

Tentons d'utiliser le développement complet :

$$J_\tau(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\tau\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\quad I_\tau(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\tau\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\quad \tau\geq 1$$

$$\frac{dJ_\tau(z)}{dz}=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{\tau-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(2k+\tau)}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\quad \frac{dI_\tau(z)}{dz}=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{\tau-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2k+\tau)}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

$$J_m(\lambda_{m,n_\nu}\mu)=\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\mu}{2}\right)^m\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2k}\quad I_m(\lambda_{m,n_\nu}\nu)=\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\nu}{2}\right)^m\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2k}$$

$$\left(\frac{dJ_m(\lambda_{m,n_\nu}\mu)}{d\mu}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\mu}{2}\right)^{m-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(2k+\tau)}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2k}$$

$$\left(\frac{dI_m(\lambda_{m,n_\nu}\nu)}{d\nu}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\nu}{2}\right)^{m-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2k+\tau)}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2k}$$

$$\left(\frac{dJ_m(\lambda_{m,n_\nu}\mu)}{d\mu}\right)^2\left(I_m(\lambda_{m,n_\nu}\nu)\right)^2=\frac{\nu^2}{16}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2(m-1)}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2(m-1)}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(2k+\tau)\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\right)^2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\right)^2$$

$$\left(J_m(\lambda_{m,n_\nu}\mu)\right)^2\left(\frac{dI_m(\lambda_{m,n_\nu}\nu)}{d\nu}\right)^2=\frac{\mu^2}{16}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2(m-1)}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2(m-1)}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\right)^2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2k+\tau)\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\right)^2$$

$$\left(\frac{dJ_m(\lambda_{m,n_\nu}\mu)}{d\mu}\right)^2\left(I_m(\lambda_{m,n_\nu}\nu)\right)^2+\left(J_m(\lambda_{m,n_\nu}\mu)\right)^2\left(\frac{dI_m(\lambda_{m,n_\nu}\nu)}{d\nu}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2(m-1)}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2(m-1)}P(\mu,\nu)\quad avec$$

$$P(\mu,\nu)=\left\{\begin{array}{l}\nu^2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(2k+\tau)\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\right)^2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\right)^2+\\ +\mu^2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\right)^2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2k+\tau)\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\right)\end{array}\right\}$$

$$\nu=\pm i\mu\Rightarrow(\nu)^{2k}=(-1)^k(\mu)^{2k}\quad et\quad \nu^2=-\mu^2\Rightarrow P(\mu,i\mu)=0\quad et\quad P(\mu,-i\mu)=0$$

$$P(\mu,\nu)=0\quad polynôme\ en\ \mu,\nu$$

$$\Rightarrow\exists\ Factorisation\ tq\ P(\mu,\nu)=(\mu+i\nu)(\mu-i\nu)Q(\mu,\nu)=(\mu^2+\nu^2)Q(\mu,\nu)\,polynôme\ en\ \mu,\nu$$

$$\Rightarrow G^2=\frac{1}{16}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2(m-1)}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2(m-1)}(\mu^2+\nu^2)Q(\mu,\nu)\quad avec\quad m\geq 1$$

ce qui démontre la première propriété.

Quant à la seconde propriété de régularité :

$$Par\ ailleurs\left(\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \varphi}\right)^2\Bigg|_{\mu=\nu=0} \propto \left(J_m\left(\lambda_{m,n_\nu}\mu\right)\times I_m\left(\lambda_{m,n_\nu}\nu\right)\right)^2$$

$$\left(J_m\left(\lambda_{m,n_\nu}\mu\right)\times I_m\left(\lambda_{m,n_\nu}\nu\right)\right)^2=\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2m}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2m}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2k}\right)^2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2k}\right)^2$$

$$=\mu^2\nu^2\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}}{2}\right)^{2m}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}}{2}\right)^{2m}\mu^{2(m-1)}\nu^{2(m-1)}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2k}\right)^2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2k}\right)^2$$

$$Posons\ Q(\mu,\nu)=\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}}{2}\right)^{2m}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}}{2}\right)^{2m}\mu^{2(m-1)}\nu^{2(m-1)}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2k}\right)^2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2k}\right)^2$$

$$Lim_{\substack{\mu\to 0\\ \nu\to 0}}\ Q(\mu,\nu)=Cste\Rightarrow\left(\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \varphi}\right)^2\Bigg|_{\mu=\nu=0}\propto \mu^2\nu^2 Cste$$

On voit que la factorisation démontre la propriété recherchée pour la norme du gradient des solutions aux abords de l'origine. Le développement est également valide pour toute valeur de l'ordre des fonctions de Bessel, par exemple si l'on n'a qu'une section de paraboloïde de révolution. Dans ce cas l'on écrira par exemple et la régularité du gradient est assuré pour tous les angles ouverts aigus de la section du paraboloïde de révolution.

$$G^2=\frac{1}{16}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2(\tau-1)}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2(\tau-1)}\left(\mu^2+\nu^2\right)Q(\mu,\nu)\quad avec\quad \tau=n\frac{\pi}{\vartheta_0}\geq 1\quad si\ \vartheta_0\leq\pi$$
$$F^2=\mu^2\nu^2 Q(\mu,\nu)$$

Pour les angles ouverts de la section du paraboloïde de révolution supérieurs à π, on utilise le raisonnement du problème complémentaire. Appelons problème n°1, le problème sur le secteur d'angle obtus. Il y a existence et unicité de la solution du problème de Dirichlet intérieur construite par les fonctions de l'angle obtus. Cette solution s'étend mathématiquement à tout le paraboloïde de révolution, donc sur les frontières du secteur d'angle aigu. Cela induit donc un problème aux limites de Dirichlet n°2 sur le secteur d'angle aigu. Ce dernier se construit également à l'aide des fonctions propres qui possède la régularité du gradient requise sur le système de fonctions et valeurs propres . Et par existence et unicité de la solution, induise le respect de la régularité du gradient de la solution dans son domaine complémentaire qui doit être identique à la solution du problème n°1.

Il reste à démontrer que pour les valeurs m=0, alors les solutions de Bessel d'ordre 0 respectent également la condition de régularité du gradient :

$$J_0(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\quad I_0(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\quad \frac{dJ_0(z)}{dz}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k(2k)}{2(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-1}\quad \frac{dI_0(z)}{dz}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k)}{2(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-1}$$

$$J_1(z)=\left(\frac{z}{2}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\Rightarrow\frac{dJ_0(z)}{dz}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k(2k)}{2(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-1}=\left(\frac{z}{2}\right)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k(2k)}{2(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2(k-1)}$$

$$=\left(\frac{z}{2}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}2(k+1)}{2((k+1)!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}=-\left(\frac{z}{2}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}=-J_1(z)$$

$$I_1(z)=\left(\frac{z}{2}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\Rightarrow\frac{dI_0(z)}{dz}=I_1(z)$$

$$J_0(\lambda_{0,n_\nu}\mu)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2k}\quad I_0(\lambda_{m,n_\nu}\nu)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2k}$$

$$\left(\frac{dJ_0(\lambda_{0,n_\nu}\mu)}{d\mu}\right)=-\lambda_{0,n_\nu}J_1(\lambda_{0,n_\nu}\mu)=-\lambda_{0,n_\nu}\left(\frac{\lambda_{0,n_\nu}\mu}{2}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)(k!)^2}\left(\frac{\lambda_{0,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2k}$$

$$\left(\frac{dI_0(\lambda_{0,n_\nu}\nu)}{d\nu}\right)=\lambda_{0,n_\nu}I_1(\lambda_{0,n_\nu}\nu)=\lambda_{0,n_\nu}\left(\frac{\lambda_{0,n_\nu}\nu}{2}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)(k!)^2}\left(\frac{\lambda_{0,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2k}$$

$$G^2=\left(\frac{dJ_0(\lambda_{0,n_\nu}\mu)}{d\mu}\right)^2\left(I_0(\lambda_{0,n_\nu}\nu)\right)^2+\left(J_0(\lambda_{0,n_\nu}\mu)\right)^2\left(\frac{dI_m(\lambda_{0,n_\nu}\nu)}{d\nu}\right)^2=$$

$$=\frac{(\lambda_{0,n_\nu})^4\mu^2}{4}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)(k!)^2}\left(\frac{\lambda_{0,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2k}\right)^2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2k}\right)^2+$$

$$+\frac{(\lambda_{0,n_\nu})^4\nu^2}{4}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{\lambda_{m,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2k}\right)^2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)(k!)^2}\left(\frac{\lambda_{0,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2k}\right)^2$$

$$G^2=\frac{(\lambda_{0,n_\nu})^4}{4}P(\mu,\nu)$$

$$P(\mu,\nu)=\mu^2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)(k!)^2}\left(\frac{\lambda_{0,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2k}\right)^2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\lambda_{0,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2k}\right)^2+$$

$$+\nu^2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{\lambda_{0,n_\nu}\mu}{2}\right)^{2k}\right)^2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)(k!)^2}\left(\frac{\lambda_{0,n_\nu}\nu}{2}\right)^{2k}\right)^2$$

$$\nu=\pm i\mu\Rightarrow(\nu)^{2k}=(-1)^k(\mu)^{2k}\quad et\quad \nu^2=-\mu^2\Rightarrow P(\mu,i\mu)=0\quad et\quad P(\mu,-i\mu)=0$$

$$P(\mu,\nu)=0\quad polynôme\ en\ \mu,\nu$$

$$\Rightarrow\exists\ Factorisation\ tq\ P(\mu,\nu)=(\mu+i\nu)(\mu-i\nu)Q(\mu,\nu)=(\mu^2+\nu^2)Q(\mu,\nu)\ polynôme\ en\ \mu,\nu$$

$$\Rightarrow G^2=\frac{(\lambda_{0,n_\nu})^4}{4}(\mu^2+\nu^2)Q(\mu,\nu)\quad c.q.f.d$$

Ce qui démontre la propriété voulue. Pour ce qui est de la propriété :

$$F^2=\left.\left(\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2\right|_{\mu=\nu=0}\propto\mu^2\nu^2Cste$$

Les solutions de Bessel d'ordre zéro sont liées à des fonctions non dépendantes de l'angle azimutal et par définition on a donc : $\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi}=0$

L'étude de régularité du gradient pour les solutions du problème homogène en ν est totalement analogue en substituant à chaque ν par μ et vice-versa.

Problème aux limites de Laplace – système de coordonnées paraboliques de révolution -

L'équation de Laplace dans le système de coordonnées parabolique de révolution est simplement séparable :

$$T(\mu,\nu,\varphi) = M(\mu)N(\nu)\Psi(\varphi) \quad \Delta T(\mu,\nu,\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\left\{ M''(\mu) + \frac{1}{\mu}M'(\mu) - \left(\alpha_2 + \frac{\alpha_3}{\mu^2}\right)M(\mu) = 0 \quad N''(\nu) + \frac{1}{\nu}N'(\nu) + \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_3}{\nu^2}\right)N(\nu) = 0 \quad \Psi''(\varphi) + \alpha_3\Psi(\varphi) = 0 \right.$$

en posant les cas suivants

Cas(1) $\alpha_2 = q^2$ *et* $\alpha_3 = p^2 \Rightarrow$

$$M''(\mu) + \frac{1}{\mu}M'(\mu) - \left(q^2 + \frac{p^2}{\mu^2}\right)M(\mu) = 0 \Rightarrow M(\mu) = A_\mu J_p(i\,q\,\mu) + B_\mu Y_p(i\,q\,\mu) = A_\mu I_p(\,q\,\mu) + B_\mu K_p(q\,\mu)$$

$$N''(\nu) + \frac{1}{\nu}N'(\nu) + \left(q^2 - \frac{p^2}{\nu^2}\right)N(\nu) = 0 \Rightarrow N(\nu) = A_\nu J_p(q\nu) + B_\nu Y_p(q\nu)$$

$$\Psi''(\varphi) + p^2\Psi(\varphi) = 0 \Rightarrow \Psi(\varphi) = A\,Cos(p\varphi) + B\,Sin(p\varphi)$$

Cas(2) $\alpha_2 = q^2$ *et* $\alpha_3 = -p^2 \Rightarrow$

$$M''(\mu) + \frac{1}{\mu}M'(\mu) - \left(q^2 - \frac{p^2}{\mu^2}\right)M(\mu) = 0 \Rightarrow M(\mu) = A_\mu J_{ip}(i\,q\,\mu) + B_\mu Y_{ip}(i\,q\,\mu) = A_\mu I_{ip}(\,q\,\mu) + B_\mu K_{ip}(q\,\mu)$$

$$N''(\nu) + \frac{1}{\nu}N'(\nu) + \left(q^2 + \frac{p^2}{\nu^2}\right)N(\nu) = 0 \Rightarrow N(\nu) = A_\nu J_{ip}(q\nu) + B_\nu Y_{ip}(q\nu)$$

$$\Psi''(\varphi) - p^2\Psi(\varphi) = 0 \Rightarrow \Psi(\varphi) = A\,Cosh(p\varphi) + B\,Sinh(p\varphi) = Ce^{p\varphi} + De^{-p\varphi}$$

Cas(3) $\alpha_2 = q^2$ *et* $\alpha_3 = 0$ $T(\mu,\nu,\varphi)$ *ne dépend plus de* φ

$$M''(\mu) + \frac{1}{\mu}M'(\mu) - q^2M(\mu) = 0 \Rightarrow M(\mu) = A_\mu J_0(i\,q\,\mu) + B_\mu Y_0(i\,q\,\mu) = A_\mu I_0(\,q\,\mu) + B_\mu K_0(q\,\mu)$$

$$N''(\nu) + \frac{1}{\nu}N'(\nu) + q^2N(\nu) = 0 \Rightarrow N(\nu) = A_\nu J_0(q\nu) + B_\nu Y_0(q\nu)$$

Cas(4) $\alpha_2 = -q^2$ *et* $\alpha_3 = p^2 \Rightarrow$

$$M''(\mu) + \frac{1}{\mu}M'(\mu) + \left(q^2 - \frac{p^2}{\mu^2}\right)M(\mu) = 0 \Rightarrow M(\mu) = A_\mu J_p(q\,\mu) + B_\mu Y_p(q\,\mu)$$

$$N''(\nu) + \frac{1}{\nu}N'(\nu) - \left(q^2 + \frac{p^2}{\nu^2}\right)N(\nu) = 0 \Rightarrow N(\nu) = A_\nu J_p(i\,q\nu) + B_\nu Y_p(i\,q\nu) = A_\nu I_p(\,q\nu) + B_\nu K_p(q\nu)$$

$$\Psi''(\varphi) + p^2\Psi(\varphi) = 0 \Rightarrow \Psi(\varphi) = A\,Cos(p\varphi) + B\,Sin(p\varphi)$$

Cas(5) $\alpha_2 = -q^2$ *et* $\alpha_3 = -p^2 \Rightarrow$

$$M''(\mu) + \frac{1}{\mu}M'(\mu) + \left(q^2 + \frac{p^2}{\mu^2}\right)M(\mu) = 0 \Rightarrow M(\mu) = A_\mu J_{ip}(q\,\mu) + B_\mu Y_{ip}(q\,\mu)$$

$$N''(\nu) + \frac{1}{\nu}N'(\nu) - \left(q^2 - \frac{p^2}{\nu^2}\right)N(\nu) = 0 \Rightarrow= A_\nu I_{ip}(\,q\nu) + B_\nu K_{ip}(q\nu)$$

$$\Psi''(\varphi) - p^2\Psi(\varphi) = 0 \Rightarrow \Psi(\varphi) = A\,Cosh(p\varphi) + B\,Sinh(p\varphi) = Ce^{p\varphi} + De^{-p\varphi}$$

Cas(6) $T(\mu,\nu,\varphi)$ *ne dépend plus de* φ $\alpha_2 = -q^2$ *et* $\alpha_3 = 0$

$$M''(\mu) + \frac{1}{\mu}M'(\mu) + q^2M(\mu) = 0 \Rightarrow M(\mu) = A_\mu J_0(q\,\mu) + B_\mu Y_0(q\,\mu)$$

$$N''(\nu) + \frac{1}{\nu}N'(\nu) - q^2N(\nu) = 0 \Rightarrow N(\nu) = A_\nu J_0(i\,q\nu) + B_\nu Y_0(i\,q\nu) = A_\nu I_0(\,q\nu) + B_\nu K_0(q\nu)$$

Les derniers cas étant les suivants :

$Cas(7)\quad \alpha_2 = 0 \; et \; \alpha_3 = p^2 \Rightarrow$

$$M''(\mu)+\frac{1}{\mu}M'(\mu)-\frac{p^2}{\mu^2}M(\mu)=0 \Rightarrow \begin{cases} M(\mu)=A_\mu Cosh\left(p\,Log(\mu)\right)+B_\mu Sinh\left(p\,Log(\mu)\right)= \\ C_\mu e^{q\,Log(\mu)}+D_\mu e^{-q\,Log(\mu)}=C_\mu \mu^{p}+D_\mu \mu^{-p} \end{cases}$$

$$N''(\nu)+\frac{1}{\nu}N'(\nu)-\frac{p^2}{\nu^2}N(\nu)=0 \Rightarrow \begin{cases} N(\nu)=A_\nu Cosh\left(p\,Log(\nu)\right)+B_\nu Sinh\left(p\,Log(\nu)\right)= \\ =C_\nu \nu^{p}+D_\nu \nu^{-p} \end{cases}$$

$$\Psi''(\varphi)+p^2\Psi(\varphi)=0 \Rightarrow \Psi(\varphi)=A\,Cos(p\varphi)+B\,Sin(p\varphi)$$

$Cas(8)\quad \alpha_2 = 0 \; et \; \alpha_3 = -p^2 \Rightarrow$

$$M''(\mu)+\frac{1}{\mu}M'(\mu)+\frac{p^2}{\mu^2}M(\mu)=0 \Rightarrow M(\mu)=A_\mu Cos\left(p\,Log(\mu)\right)+B_\mu Sin\left(p\,Log(\mu)\right)$$

$$N''(\nu)+\frac{1}{\nu}N'(\nu)+\frac{p^2}{\nu^2}N(\nu)=0 \Rightarrow N(\nu)=A_\nu Cos\left(p\,Log(\nu)\right)+B_\nu Sin\left(p\,Log(\nu)\right)$$

$$\Psi''(\varphi)-p^2\Psi(\varphi)=0 \Rightarrow \Psi(\varphi)=A\,Cosh(p\varphi)+B\,Sinh(p\varphi)=Ce^{p\varphi}+De^{-p\varphi}$$

$Cas(9)\quad \alpha_2 = 0 \; et \quad \alpha_3 = 0$

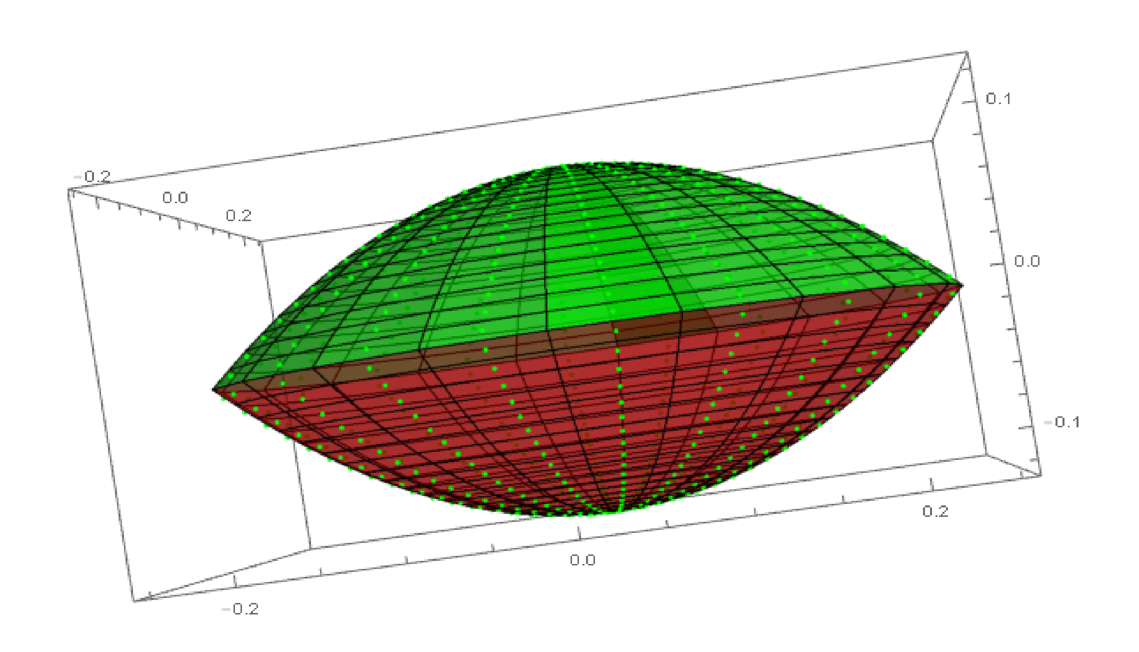
$$M''(\mu)+\frac{1}{\mu}M'(\mu)=0 \Rightarrow M(\mu)=A_\mu+B_\mu Log(\mu)$$

$$N''(\nu)+\frac{1}{\nu}N'(\nu)=0 \Rightarrow N(\nu)=A_\nu+B_\nu Log(\nu)$$

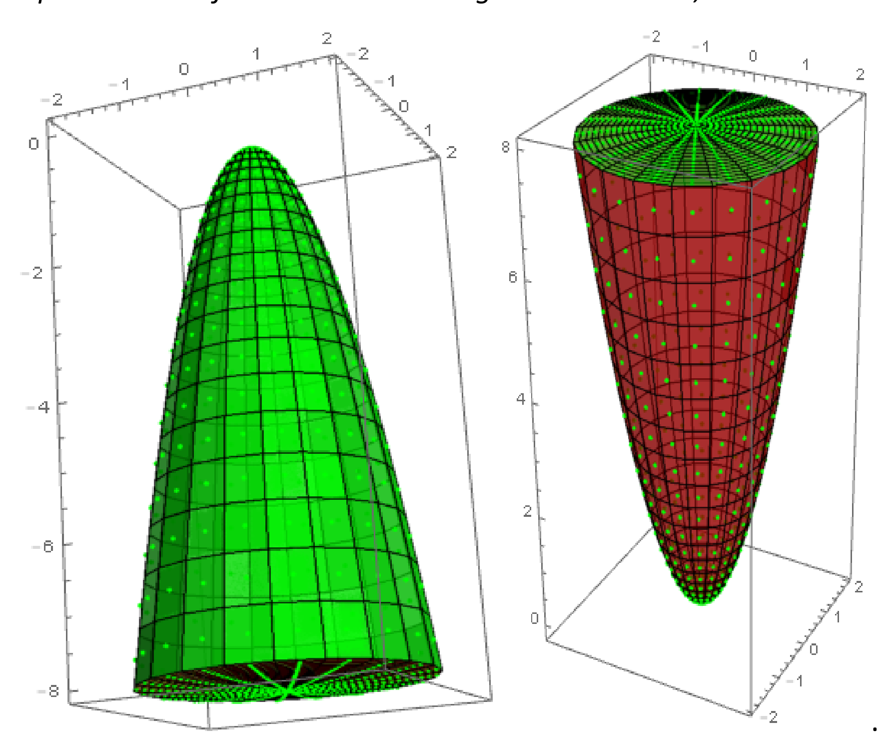
$$\Psi(\varphi)=A+B\,\varphi$$

Lentille parabolique ou paraboloïde de révolution plein fini de révolution soumis à des conditions aux limites indépendantes de l'angle azimutal

***Exemple** : soit le problème sur un "rectangle" paraboloïdal de révolution* $(\mu,\nu)\in\Omega=[0,\mu_0]\times[0,\nu_0]$ *dans lequel les conditions ne dépendent pas de l'angle azimutal sur le paraboloïde de révolution. Ci-après une lentille paraboloïde de révolution symétrique* $\mu_0=\nu_0$



Deux paraboloïdes finis de révolution à gauche $\mu_0 << \nu_0$*, à droite* $\mu_0 >> \nu_0$



.

Le problème aux limites de l'équation de Laplace se présente comme suit :

$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}\right)=0$$

$$(\mu,\nu)\in\Omega=[0,\mu_0]\times[0,\nu_0]\quad T(\mu,\nu)\ fini$$

$$C.L.\quad \alpha_{\mu_0}^{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial n}+\beta_{\mu_0}^{\mu}\,T(\mu,\nu)\Big|_{\mu=\mu_0}=0\rightarrow\alpha_{\mu_0}^{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\beta_{\mu_0}^{\mu}\,T(\mu,\nu)\Big|_{\mu=\mu_0}=0$$

$$\alpha_{\nu_0}^{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial n}+\beta_{\nu_0}^{\nu}\,T(\mu,\nu)\Big|_{\nu=\nu_0}=f_{\partial\Omega}(\mu)\rightarrow\frac{\alpha_{\nu_0}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}+\beta_{\nu_0}^{\nu}\,T(\mu,\nu)\Big|_{\nu=\nu_0}=f_{\partial\Omega}(\mu)$$

La condition homogène étant dans la direction des coordonnées μ, il convient de prendre les solution séparées du cas n°4, soit :

$$M_n(\mu)=A_\mu J_0(\lambda_n\,\mu)+B_\mu Y_0(\lambda_n\,\mu)$$
$$N_n(\nu)=A_\nu I_0(\lambda_n\,\nu)+B_\nu K_0(\lambda_n\,\nu)$$
$$T(\mu,\nu)\ fini\quad lorsque\quad \mu\rightarrow 0\Rightarrow B_\mu=0$$
$$T(\mu,\nu)\ fini\quad lorsque\quad \nu\rightarrow 0\Rightarrow B_\nu=0$$
$$C.L.\Rightarrow\alpha_{\mu_0}^{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\beta_{\mu_0}^{\mu}\,T(\mu,\nu)\Big|_{\mu=\mu_0}=0\Rightarrow\lambda_n\quad tq\quad \alpha_{\mu_0}^{\mu}\lambda_n J_1(\lambda_n\,\mu_0)=\beta_{\mu_0}^{\mu}\,J_0(\lambda_n\,\mu_0)$$
$$T(\mu,\nu)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n J_0(\lambda_n\,\mu)I_0(\lambda_n\,\nu)$$

Normes des fonctions propres :

$$\|M_n(\mu)\|^2=\int_0^{\mu_0}d\mu\ \mu\ M_n(\mu)^2=\frac{\left[\mu^2\left(\frac{1}{\lambda_n^2}(M_n'(\mu))^2+(M_n(\mu))^2\right)\right]_0^{\mu_0}}{2}=\frac{\mu_0^2\left(\frac{1}{\lambda_n^2}(M_n'(\mu_0))^2+(M_n(\mu_0))^2\right)}{2}$$

$$-\frac{M_n'(\mu_0)}{\lambda_n}=J_1(\lambda_n\,\mu_0)\Rightarrow\|M_n(\mu)\|^2=\frac{\mu_0^2\left((J_1(\lambda_n\,\mu_0))^2+(J_0(\lambda_n\,\mu_0))^2\right)}{2}$$

Deux formes en injectant l'équation transcendantale

$$\|M_n(\mu)\|^2=\frac{\mu_0^2(J_0(\lambda_n\,\mu_0))^2\left(1+\frac{(\beta_{\mu_0}^{\mu})^2}{\lambda_n^2(\alpha_{\mu_0}^{\mu})^2}\right)}{2}=\frac{\mu_0^2(J_1(\lambda_n\,\mu_0))^2\left(1+\frac{\lambda_n^2(\alpha_{\mu_0}^{\mu})^2}{(\beta_{\mu_0}^{\mu})^2}\right)}{2}$$

Même si la condition aux limites mixtes homogène est un artifice pour représenter les cas Neumann et Dirichlet en une seule formule, il est permis en revanche de prendre une condition aux limites mixte inhomogène stricte dans le système de coordonnées. Ce qui donne :

$$\alpha_{\nu_0}^{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial n}+\beta_{\nu_0}^{\nu}\,T(\mu,\nu)\Big|_{\nu=\nu_0}=f_{\partial\Omega}(\mu)\rightarrow\frac{\alpha_{\nu_0}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}+\beta_{\nu_0}^{\nu}\,T(\mu,\nu)\Big|_{\nu=\nu_0}=f_{\partial\Omega}(\mu)$$

La prise en compte de cette condition aux limites conduit à l'élaboration des intégrales suivantes pour la détermination des coefficients du développement en série :

$$\left.\frac{\alpha_{\nu_0}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \nu}+\beta_{\nu_0}^{\nu}\,T(\mu,\nu)\right|_{\nu=\nu_0}=f_{\partial\Omega}(\mu) \quad et \quad T(\mu,\nu)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n J_0(\lambda_n\,\mu)I_0(\lambda_n\,\nu)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}A_n J_0(\lambda_n\,\mu)\left(\lambda_n\frac{\alpha_{\nu_0}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}}I_1(\lambda_n\,\nu_0)+\beta_{\nu_0}^{\nu}\,I_0(\lambda_n\,\nu_0)\right)=f_{\partial\Omega}(\mu)$$

$$\Rightarrow A_n=\frac{1}{\|M_n(\mu)\|^2}\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\frac{J_0(\lambda_n\,\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,f_{\partial\Omega}(\mu)}{\left(\lambda_n\alpha_{\nu_0}^{\nu}I_1(\lambda_n\,\nu_0)+\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,\beta_{\nu_0}^{\nu}\,I_0(\lambda_n\,\nu_0)\right)}$$

Dans ce problème il ne faut pas omettre les solutions de valeurs propres nulles, qui change de nature lorsque $\lambda_n=0$. Dans ce cas les fonctions solutions sont de la forme A+BLog(μ) et C+DLog(ν). Du fait des conditions de finitude en ν=0 et μ=0. La forme s'impose comme étant une constante tant en μ que ν, constante qui ne peut-être solution de l'équation de Laplace avec respect des conditions aux limites que si la condition aux limites homogènes en μ est de Neumann. Dans ce cas :

$$\alpha_{\mu_0}^{\mu}=1 \quad et \quad \beta_{\mu_0}^{\mu}=0$$

$$M_n(\mu)=J_0(\lambda_n\,\mu) \quad \lambda_n \quad tq \quad J_1(\lambda_n\,\mu)=0$$

$$\|M_n(\mu)\|^2=\frac{\mu_0{}^2(J_0(\lambda_n\,\mu_0))^2}{2}$$

$$\Rightarrow A_n=\frac{2}{\mu_0{}^2}\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\frac{J_0(\lambda_n\,\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,f_{\partial\Omega}(\mu)}{\lambda_n I_1(\lambda_n\,\nu_0)(J_0(\lambda_n\,\mu_0))^2}$$

$$M_0(\mu)N_0(\nu)=A_0$$

$$A_0=\frac{2}{\mu_0{}^2\beta_{\nu_0}^{\nu}}\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,f_{\partial\Omega}(\mu)$$

$$Si \quad \beta_{\nu_0}^{\nu}=0 \quad A_0 \quad est\ une\ constante\ quelconque\ puisque\ \left.\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=\mu_0}=0\ et\ \left.\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}\right|_{\nu=\nu_0}=0$$

Pour fixer les idées prenons des conditions aux limites homogène et inhomogène de Dirichlet :

$$\alpha_{\mu_0}^{\mu}=\alpha_{\nu_0}^{\nu}=0 \quad \beta_{\mu_0}^{\mu}=\beta_{\nu_0}^{\nu}=1\Rightarrow A_n=\frac{1}{\|M_n(\mu)\|^2}\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\frac{J_0(\lambda_n\,\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,f_{\partial\Omega}(\mu)}{\left(\lambda_n\alpha_{\nu_0}^{\nu}I_1(\lambda_n\,\nu_0)+\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,\beta_{\nu_0}^{\nu}\,I_0(\lambda_n\,\nu_0)\right)}$$

$$M_n(\mu)=J_0(\lambda_n\,\mu)\Rightarrow\|M_n(\mu)\|^2=\frac{\mu_0{}^2(J_1(\lambda_n\,\mu_0))^2\left(1+\frac{\lambda_n^2(\alpha_{\mu_0}^{\mu})^2}{(\beta_{\mu_0}^{\mu})^2}\right)}{2}=\frac{\mu_0{}^2(J_1(\lambda_n\,\mu_0))^2}{2}$$

$$\Rightarrow A_n=\frac{2\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,J_0(\lambda_n\,\mu)f_{\partial\Omega}(\mu)}{\mu_0{}^2(J_1(\lambda_n\,\mu_0))^2 I_0(\lambda_n\,\nu_0)} \quad T(\mu,\nu)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n J_0(\lambda_n\,\mu)I_0(\lambda_n\,\nu) \quad \lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n\,\mu_0)=0$$

Pour des conditions aux limites homogène et inhomogène de Neumann :

$$\alpha^{\mu}_{\mu_0}=\alpha^{\nu}_{\nu_0}=1 \quad \beta^{\mu}_{\mu_0}=\beta^{\nu}_{\nu_0}=0 \Rightarrow A_n=\frac{1}{\|M_n(\mu)\|^2}\int_0^{\mu_0} d\mu\,\mu\frac{J_0(\lambda_n\,\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,f_{\partial\Omega}(\mu)}{\left(\lambda_n\alpha^{\nu}_{\nu_0}I_1(\lambda_n\,\nu_0)+\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,\beta^{\nu}_{\nu_0}\,I_0(\lambda_n\,\nu_0)\right)}$$

$$M_n(\mu)=J_0(\lambda_n\,\mu)\Rightarrow\|M_n(\mu)\|^2=\frac{\mu_0{}^2(J_0(\lambda_n\,\mu_0))^2}{2}$$

$$\Rightarrow A_n=\frac{2\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,J_0(\lambda_n\,\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,f_{\partial\Omega}(\mu)}{\mu_0{}^2(J_0(\lambda_n\,\mu_0))^2\lambda_n I_1(\lambda_n\,\nu_0)} \quad A_0 \text{ constante quelconque}$$

$$T(\mu,\nu)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}A_nJ_0(\lambda_n\,\mu)I_0(\lambda_n\,\nu) \quad \lambda_n \quad tq \quad \lambda_nJ_1(\lambda_n\,\mu_0)=0$$

Pour des conditions aux limites homogène de Neumann et inhomogène de Dirichlet:

$$\left.\begin{matrix}\alpha^{\mu}_{\mu_0}=1 & \beta^{\mu}_{\mu_0}=0\\ \alpha^{\nu}_{\nu_0}=0 & \beta^{\nu}_{\nu_0}=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow A_n=\frac{1}{\|M_n(\mu)\|^2}\int_0^{\mu_0} d\mu\,\mu\frac{J_0(\lambda_n\,\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,f_{\partial\Omega}(\mu)}{\left(\lambda_n\alpha^{\nu}_{\nu_0}I_1(\lambda_n\,\nu_0)+\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,\beta^{\nu}_{\nu_0}\,I_0(\lambda_n\,\nu_0)\right)}$$

$$M_n(\mu)=J_0(\lambda_n\,\mu)\Rightarrow\|M_n(\mu)\|^2=\frac{\mu_0{}^2(J_0(\lambda_n\,\mu_0))^2}{2}$$

$$\Rightarrow A_n=\frac{2\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,J_0(\lambda_n\,\mu)f_{\partial\Omega}(\mu)}{\mu_0{}^2(J_0(\lambda_n\,\mu_0))^2 I_0(\lambda_n\,\nu_0)} \qquad A_0=\frac{2}{\mu_0{}^2}\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,f_{\partial\Omega}(\mu)$$

$$T(\mu,\nu)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}A_nJ_0(\lambda_n\,\mu)I_0(\lambda_n\,\nu) \quad \lambda_n \quad tq \quad \lambda_nJ_1(\lambda_n\,\mu_0)=0$$

$$Si \quad f_{\partial\Omega}(\mu)=T_0\Rightarrow\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,J_0(\lambda_n\,\mu)\propto\mu_0\,J_1(\lambda_n\,\mu_0)=0\Rightarrow T(\mu,\nu)=T_0$$

Et enfin pour des conditions aux limites homogène de Dirichlet et inhomogène de Neumann:

$$\left.\begin{matrix}\alpha^{\mu}_{\mu_0}=0 & \beta^{\mu}_{\mu_0}=1\\ \alpha^{\nu}_{\nu_0}=1 & \beta^{\nu}_{\nu_0}=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow A_n=\frac{1}{\|M_n(\mu)\|^2}\int_0^{\mu_0} d\mu\,\mu\frac{J_0(\lambda_n\,\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,f_{\partial\Omega}(\mu)}{\left(\lambda_n\alpha^{\nu}_{\nu_0}I_1(\lambda_n\,\nu_0)+\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,\beta^{\nu}_{\nu_0}\,I_0(\lambda_n\,\nu_0)\right)}$$

$$M_n(\mu)=J_0(\lambda_n\,\mu)\Rightarrow\|M_n(\mu)\|^2=\frac{\mu_0{}^2(J_1(\lambda_n\,\mu_0))^2}{2}$$

$$\Rightarrow A_n=\frac{2\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,J_0(\lambda_n\,\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,f_{\partial\Omega}(\mu)}{\mu_0{}^2(J_1(\lambda_n\,\mu_0))^2\lambda_n I_1(\lambda_n\,\nu_0)} \quad T(\mu,\nu)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_nJ_0(\lambda_n\,\mu)I_0(\lambda_n\,\nu) \quad \lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n\,\mu_0)=0$$

***Exemple**: soit le problème complémentaire homogène en coordonnées ν et inhomogène en coordonnée μ. Le problème aux limites de l'équation de Laplace se présente comme suit :*

$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}\right)=0$$

$$(\mu,\nu)\in\Omega=[0,\mu_0]\times[0,\nu_0] \quad T(\mu,\nu)\ fini$$

$$C.L.\quad \alpha_{\mu_0}^{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial n}+\beta_{\mu_0}^{\mu}\,T(\mu,\nu)\bigg|_{\mu=\mu_0}=f_{\partial\Omega}(\nu)\rightarrow \alpha_{\mu_0}^{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\beta_{\mu_0}^{\mu}\,T(\mu,\nu)\bigg|_{\mu=\mu_0}=f_{\partial\Omega}(\nu)$$

$$\alpha_{\nu_0}^{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial n}+\beta_{\nu_0}^{\nu}\,T(\mu,\nu)\bigg|_{\nu=\nu_0}=0\rightarrow \frac{\alpha_{\nu_0}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}+\beta_{\nu_0}^{\nu}\,T(\mu,\nu)\bigg|_{\nu=\nu_0}=0$$

Les formules se déduisent facilement des formules précédentes par la substitution entre μ et ν. Ce qui donne immédiatement :

$$M_n(\mu)=A_\mu I_0(\lambda_n\,\mu)+B_\mu K_0(\lambda_n\,\mu)$$

$$N_n(\nu)=A_\nu J_0(\lambda_n\,\nu)+B_\nu Y_0(\lambda_n\,\nu)$$

$$T(\mu,\nu)\ fini\,lorsque\ \mu\rightarrow 0\Rightarrow B_\mu=0\quad T(\mu,\nu)\ fini\quad lorsque\quad \nu\rightarrow 0\Rightarrow B_\nu=0\quad T(\mu,\nu)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n I_0(\lambda_n\,\mu)J_0(\lambda_n\,\nu)$$

$$C.L.\Rightarrow \alpha_{\nu_0}^{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}+\beta_{\nu_0}^{\nu}\,T(\mu,\nu)\bigg|_{\nu=\nu_0}=0\Rightarrow\lambda_n\quad tq\quad \alpha_{\nu_0}^{\nu}\lambda_n J_1(\lambda_n\,\nu_0)=\beta_{\nu_0}^{\nu}\,J_0(\lambda_n\,\nu_0)$$

Normes des fonctions propres :

$$\|N_n(\nu)\|^2=\int_0^{\nu_0}d\nu\,\nu\,N_n(\nu)^2=\frac{\left[\nu^2\left(\frac{1}{\lambda_n^2}(N_n'(\nu))^2+(N_n(\nu))^2\right)\right]_0^{\nu_0}}{2}=\frac{{\nu_0}^2\left((J_1(\lambda_n\,\nu_0))^2+(J_0(\lambda_n\,\nu_0))^2\right)}{2}$$

Trois formes

$$\|N_n(\nu)\|^2=\frac{{\nu_0}^2\left((J_1(\lambda_n\,\nu_0))^2+(J_0(\lambda_n\,\nu_0))^2\right)}{2}=\frac{{\nu_0}^2(J_0(\lambda_n\,\nu_0))^2\left(\lambda_n^2(\alpha_{\nu_0}^{\nu})^2+(\beta_{\nu_0}^{\nu})^2\right)}{2\lambda_n^2(\alpha_{\nu_0}^{\nu})^2}=\frac{{\nu_0}^2(J_1(\lambda_n\,\nu_0))^2\left((\beta_{\nu_0}^{\nu})^2+\lambda_n^2(\alpha_{\nu_0}^{\nu})^2\right)}{2(\beta_{\nu_0}^{\nu})^2}$$

La prise en compte de la condition aux limites en ν=ν0 conduit à l'élaboration des intégrales suivantes pour la détermination des coefficients du développement en série :

$$\frac{\alpha_{\mu_0}^{\mu}}{\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu_0,\nu)}{\partial\nu}+\beta_{\mu_0}^{\mu}\,T(\mu_0,\nu)=f_{\partial\Omega}(\nu)\quad et\quad T(\mu,\nu)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n I_0(\lambda_n\,\mu)J_0(\lambda_n\,\nu)$$

$$\Rightarrow A_n=\frac{1}{\|N_n(\nu)\|^2}\int_0^{\nu_0}d\nu\,\nu\,\frac{\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}\,J_0(\lambda_n\,\nu)f_{\partial\Omega}(\nu)}{\left(\lambda_n\alpha_{\mu_0}^{\mu}I_1(\lambda_n\,\mu_0)+\beta_{\nu_0}^{\nu}\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}\,I_0(\lambda_n\,\mu_0)\right)}$$

Pour fixer les idées prenons des conditions aux limites homogène et inhomogène de Dirichlet :

$$\alpha^{\mu}_{\mu_0}=\alpha^{\nu}_{\nu_0}=0 \quad \beta^{\mu}_{\mu_0}=\beta^{\nu}_{\nu_0}=1 \Rightarrow A_n=\frac{1}{\|N_n(\nu)\|^2}\int_0^{\nu_0} d\nu\,\nu\,\frac{\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}\,J_0(\lambda_n\nu)f_{\partial\Omega}(\nu)}{\left(\lambda_n\alpha^{\mu}_{\mu_0}I_1(\lambda_n\mu_0)+\beta^{\nu}_{\nu_0}\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}\,I_0(\lambda_n\mu_0)\right)}$$

$$N_n(\nu)=J_0(\lambda_n\nu)\Rightarrow\|N_n(\nu)\|^2=\frac{{\nu_0}^2(J_1(\lambda_n\nu_0))^2}{2}$$

$$\Rightarrow A_n=\frac{2\int_0^{\nu_0} d\nu\,\nu\,J_0(\lambda_n\nu)f_{\partial\Omega}(\nu)}{{\nu_0}^2(J_1(\lambda_n\nu_0))^2 I_0(\lambda_n\mu_0)} \quad T(\mu,\nu)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_nI_0(\lambda_n\mu)J_0(\lambda_n\nu) \quad \lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n\nu_0)=0$$

Pour des conditions aux limites homogène et inhomogène de Neumann :

$$\alpha^{\mu}_{\mu_0}=\alpha^{\nu}_{\nu_0}=1 \quad \beta^{\mu}_{\mu_0}=\beta^{\nu}_{\nu_0}=0 \Rightarrow A_n=\frac{1}{\|N_n(\nu)\|^2}\int_0^{\nu_0} d\nu\,\nu\,\frac{\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}\,J_0(\lambda_n\nu)f_{\partial\Omega}(\nu)}{\left(\lambda_n\alpha^{\mu}_{\mu_0}I_1(\lambda_n\mu_0)+\beta^{\nu}_{\nu_0}\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}\,I_0(\lambda_n\mu_0)\right)}$$

$$N_n(\nu)=J_0(\lambda_n\nu)\Rightarrow\|N_n(\nu)\|^2=\frac{{\nu_0}^2(J_0(\lambda_n\nu_0))^2}{2} \qquad A_0 \text{ constante quelconque}$$

$$\Rightarrow A_n=\frac{2\int_0^{\nu_0} d\nu\,\nu\,J_0(\lambda_n\nu)\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}\,f_{\partial\Omega}(\nu)}{{\nu_0}^2(J_0(\lambda_n\nu_0))^2\lambda_nI_1(\lambda_n\mu_0)} \quad T(\mu,\nu)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}A_nI_0(\lambda_n\mu)J_0(\lambda_n\nu) \quad \lambda_n \quad tq \quad \lambda_nJ_1(\lambda_n\mu_0)=0$$

Pour des conditions aux limites inhomogène de Neumann et homogène de Dirichlet:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^{\mu}_{\mu_0}=1 \quad \beta^{\mu}_{\mu_0}=0\\ \alpha^{\nu}_{\nu_0}=0 \quad \beta^{\nu}_{\nu_0}=1\end{array}\right\}\Rightarrow A_n=\frac{1}{\|N_n(\nu)\|^2}\int_0^{\nu_0} d\nu\,\nu\,\frac{\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}\,J_0(\lambda_n\nu)f_{\partial\Omega}(\nu)}{\left(\lambda_n\alpha^{\mu}_{\mu_0}I_1(\lambda_n\mu_0)+\beta^{\nu}_{\nu_0}\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}\,I_0(\lambda_n\mu_0)\right)}$$

$$N_n(\nu)=J_0(\lambda_n\nu)\Rightarrow\|N_n(\nu)\|^2=\frac{{\nu_0}^2(J_1(\lambda_n\nu_0))^2}{2}$$

$$\Rightarrow A_n=\frac{2\int_0^{\nu_0} d\nu\,\nu\,J_0(\lambda_n\nu)\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}\,f_{\partial\Omega}(\nu)}{{\nu_0}^2(J_1(\lambda_n\mu_0))^2\lambda_nI_1(\lambda_n\mu_0)} \quad T(\mu,\nu)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_nI_0(\lambda_n\mu)J_0(\lambda_n\nu) \quad \lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n\nu_0)=0$$

Et enfin pour des conditions aux limites inhomogènes de Dirichlet et homogène de Neumann:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^{\mu}_{\mu_0}=0 \quad \beta^{\mu}_{\mu_0}=1\\ \alpha^{\nu}_{\nu_0}=1 \quad \beta^{\nu}_{\nu_0}=0\end{array}\right\}\Rightarrow A_n=\frac{1}{\|N_n(\nu)\|^2}\int_0^{\nu_0} d\nu\,\nu\,\frac{\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}\,J_0(\lambda_n\nu)f_{\partial\Omega}(\nu)}{\left(\lambda_n\alpha^{\mu}_{\mu_0}I_1(\lambda_n\mu_0)+\beta^{\nu}_{\nu_0}\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}\,I_0(\lambda_n\mu_0)\right)}$$

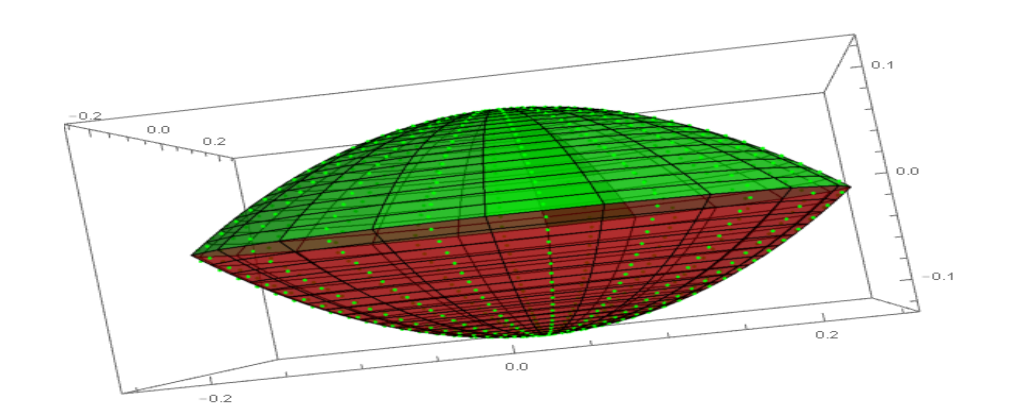
$$N_n(\nu)=J_0(\lambda_n\nu)\Rightarrow\|N_n(\nu)\|^2=\frac{{\nu_0}^2(J_0(\lambda_n\nu_0))^2}{2}$$

$$\Rightarrow A_n=\frac{2\int_0^{\nu_0} d\nu\,\nu\,J_0(\lambda_n\nu)f_{\partial\Omega}(\nu)}{{\nu_0}^2(J_0(\lambda_n\mu_0))^2 I_0(\lambda_n\mu_0)} \qquad A_0=\frac{2}{{\nu_0}^2}\int_0^{\nu_0} d\nu\,\nu\,f_{\partial\Omega}(\nu)$$

$$T(\mu,\nu)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}A_nI_0(\lambda_n\mu)J_0(\lambda_n\nu) \quad \lambda_n \quad tq \quad \lambda_nJ_1(\lambda_n\nu_0)=0$$

$$Si \quad f_{\partial\Omega}(\nu)=T_0\Rightarrow\int_0^{\nu_0} d\nu\,\nu\,J_0(\lambda_n\nu)\propto\mu_0\,J_1(\lambda_n\nu_0)=0\Rightarrow T(\mu,\nu)=T_0$$

Problème de Dirichlet extérieur à la lentille parabolique ou paraboloïde plein fini de révolution soumis à des conditions aux limites indépendantes de l'angle azimutal. Relation d'unité pour le problème intérieur de Dirichlet



Attention il s'agit pas de résoudre le problème extérieur électrostatique d'une lentille parabolique porté à un potentiel T0, car ici les conditions limites sont définies non seulement sur la lentille mais également sur les nappes paraboliques extérieures μ=μ0 et ν=ν0 jusqu'à l'infini :

$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}\right)=0$$

$$(\mu,\nu)\in\Omega=[\mu_0,\infty]\times[\nu_0,\infty] \quad T(\mu,\nu)\ fini \quad C.L.\quad T(\mu,\nu)\big|_{\mu=\mu_0}=T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=T_0$$

D'après les résultats des exemples précédents il vient immédiatement la solution suivante du problème :

$$x_n \quad tel\ que \quad J_0(x_n)=0 \quad T(\mu,\nu)=2T_0\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x_nJ_1(x_n)}\left\{\frac{J_0\left(x_n\dfrac{\mu}{\mu_0}\right)K_0\left(x_n\dfrac{\nu}{\mu_0}\right)}{K_0\left(x_n\dfrac{\nu_0}{\mu_0}\right)}+\frac{J_0\left(x_n\dfrac{\nu}{\nu_0}\right)K_0\left(x_n\dfrac{\mu}{\nu_0}\right)}{K_0\left(x_n\dfrac{\mu_0}{\nu_0}\right)}\right\}$$

Pour la relation d'unité pour le problème intérieur de Dirichlet, elle vient du problème aux limites qui a la solution triviale constante 1 :

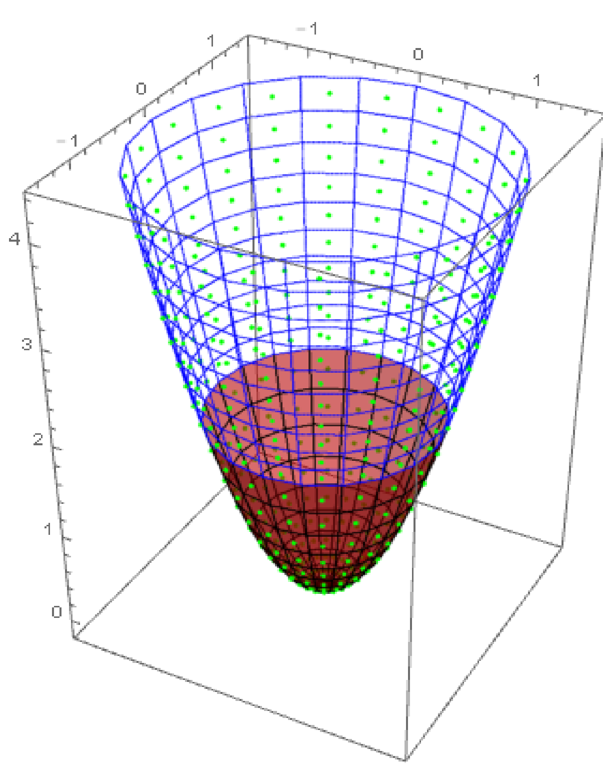
$$(\mu,\nu)\in\Omega=[0,\mu_0]\times[0,\nu_0] \quad T(\mu,\nu)\ fini \quad C.L.\quad T(\mu,\nu)\big|_{\mu=\mu_0}=T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=1$$

Comme la solution est la suivante, il vient immédiatement la relation d'unité :

$$x_n \quad tel\ que \quad J_0(x_n)=0 \quad T(\mu,\nu)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x_nJ_1(x_n)}\left\{\frac{J_0\left(x_n\dfrac{\mu}{\mu_0}\right)I_0\left(x_n\dfrac{\nu}{\mu_0}\right)}{I_0\left(x_n\dfrac{\nu_0}{\mu_0}\right)}+\frac{J_0\left(x_n\dfrac{\nu}{\nu_0}\right)I_0\left(x_n\dfrac{\mu}{\nu_0}\right)}{I_0\left(x_n\dfrac{\mu_0}{\nu_0}\right)}\right\}\equiv 1 \quad \forall(\mu,\nu)\in[0,\mu_0]\times[0,\nu_0]$$

.

Exemple : problème aux limites de Dirichlet sur un paraboloïde de révolution infini, solution développée en série



Le problème aux limites de l'équation de Laplace se présente comme suit :

$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial \mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \mu}+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial \nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \nu}\right)=0$$

$$(\mu,\nu)\in\Omega=[0,\mu_0]\times[0,\infty] \quad T(\mu,\nu)\ fini$$

$$C.L.\quad T(\mu,\nu)\big|_{\substack{\mu=\mu_0\\ \nu\le\nu_0}}=T_0 \qquad T(\mu,\nu)\big|_{\substack{\mu=\mu_0\\ \nu>\nu_0}}=0$$

On va étudier deux problèmes dérivées de quelques résultats précédents, le premier est un problème intérieur :

$$(\mu,\nu)\in\Omega=[0,\mu_0]\times[0,\nu_0]$$

$$C.L.\quad T(\mu,\nu)\big|_{\mu=\mu_0}=T_0 \qquad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=f_{\nu_0}^{int}(\mu)$$

Et le second un problème extérieur :

$$(\mu,\nu)\in\Omega=[0,\mu_0]\times[\nu_0,\infty]$$

$$C.L.\quad T(\mu,\nu)\big|_{\mu=\mu_0}=0 \qquad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=f_{\nu_0}^{ext}(\mu)$$

Le premier problème a la solution suivante, déjà évoquée dans ce qui précède :

$$\Rightarrow A_n=\frac{2\int_0^{\mu_0} d\mu\,\mu\,J_0(\lambda_n\,\mu)f_{\nu_0}^{int}(\mu)}{\mu_0^{\ 2}(J_1(\lambda_n\,\mu_0))^2 I_0(\lambda_n\,\nu_0)} \quad T(\mu,\nu)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n J_0(\lambda_n\,\mu)I_0(\lambda_n\,\nu) \quad \lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n\,\mu_0)=0$$

$$\int_0^{\mu_0} d\mu\,\mu\,J_0(\lambda_n\,\mu)=\frac{1}{\lambda_n^{\ 2}}[\lambda_n\mu_0 J_1(\lambda_n\,\mu_0)]=\frac{\mu_0 J_1(\lambda_n\,\mu_0)}{\lambda_n}$$

$$f_{\nu_0}^{int}(\mu)=T_{\nu_0}\Rightarrow A_n=\frac{2T_{\nu_0}}{\lambda_n\mu_0 J_1(\lambda_n\,\mu_0)I_0(\lambda_n\,\nu_0)}\Rightarrow T(\mu,\nu)=\frac{2T_{\nu_0}}{\mu_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\lambda_n\,\mu)}{\lambda_n J_1(\lambda_n\,\mu_0)}\frac{I_0(\lambda_n\,\nu)}{I_0(\lambda_n\,\nu_0)}$$

Le second problème, extérieur, possède le développement suivant qui se construit avec les secondes solutions de Bessel d'ordre 0 en v, soit :

$$\Rightarrow A_n = \frac{2\int_0^{\mu_0} d\mu\, \mu\, J_0(\lambda_n\, \mu) f_{\nu_0}^{ext}(\mu)}{\mu_0^{\,2}\left(J_1(\lambda_n\, \mu_0)\right)^2 K_0(\lambda_n\, \nu_0)} \quad T(\mu,\nu) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n J_0(\lambda_n\, \mu) K_0(\lambda_n\, \nu) \quad \lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n\, \mu_0) = 0$$

$$f_{\nu_0}^{ext}(\mu) = T_{\nu_0} \Rightarrow A_n = \frac{2T_{\nu_0}}{\mu_0 \lambda_n J_1(\lambda_n\, \mu_0) K_0(\lambda_n\, \nu_0)} \Rightarrow T(\mu,\nu) = \frac{2T_{\nu_0}}{\mu_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_0(\lambda_n\, \mu)}{\lambda_n J_1(\lambda_n\, \mu_0)} \frac{K_0(\lambda_n\, \nu)}{K_0(\lambda_n\, \nu_0)}$$

Le troisième problème que l'on envisage est le suivant, possédant une solution triviale :

$$(\mu,\nu) \in \Omega = [0,\mu_0] \times [0,\infty]$$

$$C.L. \quad T(\mu,\nu)\big|_{\mu=\mu_0} = T_0 \Rightarrow T(\mu,\nu) = T_0 \quad \forall (\mu,\nu) \in \Omega = [0,\mu_0] \times [0,\infty]$$

Revenons au problème de départ qui se décompose ainsi en deux sous-problèmes :

$$\Omega = [0,\mu_0] \times [0,\infty] = \Omega_1 \cup \Omega_2 \rightarrow \Omega_1 = [0,\mu_0] \times [0,\nu_0] \quad et \quad \Omega_2 = [0,\mu_0] \times [\nu_0,\infty]$$

$$T_{\Omega_1}(\mu,\nu)\big|_{\mu=\mu_0} = T_0 \quad T_{\Omega_2}(\mu,\nu)\big|_{\mu=\mu_0} = 0$$

$$T_{\Omega_1}(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0} = T_{\Omega_2}(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}$$

Ces derniers sous-problèmes doivent assurer la continuité simple, ainsi que la continuité de la dérivée première à la normale de la surface v=Cste.

Le deuxième problème est un problème aux limites homogène et extérieur qui a la solution suivante :

$$T_{\Omega_2}(\mu,\nu) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n J_0(\lambda_n\, \mu) K_0(\lambda_n\, \nu) \quad \lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n\, \mu_0) = 0 \quad avec \quad C_n = 2\frac{B_n}{\mu_0^{\,2}\left(J_1(\lambda_n\, \mu_0)\right)^2 K_0(\lambda_n\, \nu_0)}$$

$$T_{\Omega_2}(\mu,\nu) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n J_0(\lambda_n\, \mu) K_0(\lambda_n\, \nu)}{\mu_0^{\,2}\left(J_1(\lambda_n\, \mu_0)\right)^2 K_0(\lambda_n\, \nu_0)} \quad \lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n\, \mu_0) = 0 \quad avec \quad B_n = \int_0^{\mu_0} d\mu\, \mu\, J_0(\lambda_n\, \mu) T_{\Omega_1}(\mu,\nu_0)$$

Le premier problème se décompose lui aussi en deux sous problèmes :

$$(\mu,\nu) \in \Omega_1 = [0,\mu_0] \times [0,\nu_0]$$

$$T_{\Omega_1}(\mu,\nu)\big|_{\mu=\mu_0} = T_0 \qquad T_{\Omega_1}(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0} = T_{\Omega_2}(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}$$

$$T_{\Omega_1}(\mu,\nu) = T_{\Omega_{11}}(\mu,\nu) + T_{\Omega_{12}}(\mu,\nu) = T_0 + T_{\Omega_{12}}(\mu,\nu)$$

$$T_{\Omega_{11}}(\mu,\nu)\big|_{\mu=\mu_0} = T_0 \qquad T_{\Omega_{11}}(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0} = T_0 \Rightarrow T_{\Omega_{11}}(\mu,\nu) = T_0$$

$$T_{\Omega_{12}}(\mu,\nu)\big|_{\mu=\mu_0} = 0 \qquad T_{\Omega_{11}}(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0} = T_{\Omega_2}(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0} - T_0$$

La décomposition de l'unité est obtenue avec une fonction limite du problème de Dirichlet intérieur égale à 1, et sa valeur prise sur la surface v= v_0 :

$$f_{\nu_0}^{int}(\mu) = 1 \Rightarrow T(\mu,\nu_0) = 1 = \frac{2}{\mu_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_0(\lambda_n\, \mu)}{\lambda_n J_1(\lambda_n\, \mu_0)}$$

La solution du premier problème est donc :

$$T_{\Omega_1}(\mu,\nu) = T_0 \frac{2}{\mu_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_0(\lambda_n\, \mu)}{\lambda_n J_1(\lambda_n\, \mu_0)} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n J_0(\lambda_n\, \mu) I_0(\lambda_n\, \nu) \quad \lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n\, \mu_0) = 0$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2\int_0^{\mu_0} d\mu\, \mu\, J_0(\lambda_n\, \mu)\left(T_{\Omega_2}(\mu,\nu_0) - T_0\right)}{\mu_0^{\,2}\left(J_1(\lambda_n\, \mu_0)\right)^2 I_0(\lambda_n\, \nu_0)}$$

Les condition de continuité sur la surface v= v_0 donne :

$$T_{\Omega_1}(\mu,\nu)\Big|_{\nu=\nu_0} = T_{\Omega_2}(\mu,\nu)\Big|_{\nu=\nu_0}$$

$$\Rightarrow T_0 \frac{2}{\mu_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\lambda_n \mu)}{\lambda_n J_1(\lambda_n \mu_0)} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n J_0(\lambda_n \mu) I_0(\lambda_n \nu_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n J_0(\lambda_n \mu) K_0(\lambda_n \nu_0)$$

$$\Rightarrow T_0 \frac{2}{\mu_0 \lambda_n J_1(\lambda_n \mu_0)} + A_n I_0(\lambda_n \nu_0) = C_n K_0(\lambda_n \nu_0)$$

Il reste à établir la condition de continuité de la dérivée première, sachant que :

$$\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu_0}}\frac{\partial T_{\Omega_1}(\mu,\nu)}{\partial \nu}\Bigg|_{\nu=\nu_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu_0}}\frac{\partial T_{\Omega_2}(\mu,\nu)}{\partial \nu}\Bigg|_{\nu=\nu_0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu_0}}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n J_0(\lambda_n \mu)\frac{dI_0(\lambda_n \nu)}{d\nu}\Bigg|_{\nu=\nu_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu_0}}\sum_{n=1}^{+\infty} C_n J_0(\lambda_n \mu)\frac{dK_0(\lambda_n \nu)}{d\nu}\Bigg|_{\nu=\nu_0}$$

$$\frac{dI_0(\lambda_n \nu)}{d\nu} = \lambda_n I_1(\lambda_n \nu) \quad et \quad \frac{dK_0(\lambda_n \nu)}{d\nu} = -\lambda_n K_1(\lambda_n \nu)$$

Il vient : $A_n I_1(\lambda_n \nu_0) = -C_n K_1(\lambda_n \nu_0)$.

Soit le système linéaire suivant sur les coefficients :

$$\begin{cases} T_0 \dfrac{2}{\mu_0 \lambda_n J_1(\lambda_n \mu_0)} + A_n I_0(\lambda_n \nu_0) = C_n K_0(\lambda_n \nu_0) \\ A_n I_1(\lambda_n \nu_0) = -C_n K_1(\lambda_n \nu_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_n I_0(\lambda_n \nu_0) = C_n K_0(\lambda_n \nu_0) - T_0 \frac{2}{\mu_0 \lambda_n J_1(\lambda_n \mu_0)} = -\frac{A_n I_1(\lambda_n \nu_0) K_0(\lambda_n \nu_0)}{K_1(\lambda_n \nu_0)} - T_0 \frac{2}{\mu_0 \lambda_n J_1(\lambda_n \mu_0)}$$

$$\Rightarrow A_n = -T_0 \frac{2K_1(\lambda_n \nu_0)}{\mu_0 \lambda_n J_1(\lambda_n \mu_0)\left(I_0(\lambda_n \nu_0)K_1(\lambda_n \nu_0) + I_1(\lambda_n \nu_0)K_0(\lambda_n \nu_0)\right)}$$

$$\Rightarrow C_n = T_0 \frac{2I_1(\lambda_n \nu_0)}{\mu_0 \lambda_n J_1(\lambda_n \mu_0)\left(I_0(\lambda_n \nu_0)K_1(\lambda_n \nu_0) + I_1(\lambda_n \nu_0)K_0(\lambda_n \nu_0)\right)}$$

Ce qui donne pour le problème de cet exemple :

$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial \nu^2} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \nu}\right) = 0$$

$$(\mu,\nu) \in \Omega = [0,\mu_0]\times[0,\infty] \quad T(\mu,\nu)\ fini$$

$$C.L. \quad T(\mu,\nu)\Big|_{\substack{\mu=\mu_0 \\ \nu\le\nu_0}} = T_0 \qquad T(\mu,\nu)\Big|_{\substack{\mu=\mu_0 \\ \nu>\nu_0}} = 0$$

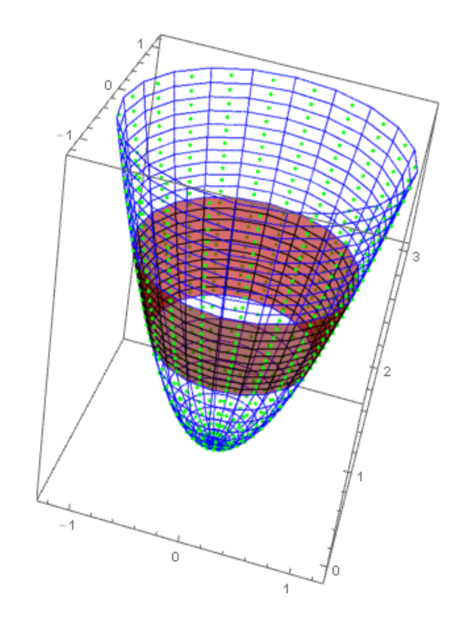
La solution suivante :

$$T(\mu,\nu) = \begin{cases} T_{\Omega_1}(\mu,\nu) & \forall(\mu,\nu)\in\Omega_1 = [0,\mu_0]\times[0,\nu_0] \\ T_{\Omega_2}(\mu,\nu) & \forall(\mu,\nu)\in\Omega_2 = [0,\mu_0]\times[\nu_0,+\infty] \end{cases} \qquad \lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n \mu_0) = 0$$

$$T_{\Omega_1}(\mu,\nu) = T_0 \frac{2}{\mu_0}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\lambda_n \mu)}{\lambda_n J_1(\lambda_n \mu_0)}\frac{K_1(\lambda_n \nu_0)\left(I_0(\lambda_n \nu_0) - I_0(\lambda_n \nu)\right) + I_1(\lambda_n \nu_0)K_0(\lambda_n \nu_0)}{\left(I_0(\lambda_n \nu_0)K_1(\lambda_n \nu_0) + I_1(\lambda_n \nu_0)K_0(\lambda_n \nu_0)\right)}\right)$$

$$T_{\Omega_2}(\mu,\nu) = T_0 \frac{2}{\mu_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\lambda_n \mu)}{\lambda_n J_1(\lambda_n \mu_0)}\frac{I_1(\lambda_n \nu_0)K_0(\lambda_n \nu)}{\left(I_0(\lambda_n \nu_0)K_1(\lambda_n \nu_0) + I_1(\lambda_n \nu_0)K_0(\lambda_n \nu_0)\right)}$$

Exemple : un autre problème aux limites de Dirichlet sur un paraboloïde de révolution infini, développement en série



Le problème aux limites de l'équation de Laplace se présente de manière similaire au problème précédent comme suit :

$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}\right)=0$$

$$(\mu,\nu)\in\Omega\,/\,\Omega=[0,\mu_0]\times[0,\infty] \quad T(\mu,\nu)\ fini \quad C.L.\quad T(\mu,\nu)\big|_{\substack{\mu=\mu_0\\ \nu\le\nu_1}}=0 \quad T(\mu,\nu)\Big|_{\substack{\mu=\mu_0\\ \nu_1\le\nu\le\nu_2}}=T_0 \quad T(\mu,\nu)\big|_{\substack{\mu=\mu_0\\ \nu>\nu_2}}=0$$

On décompose en trois sous-problèmes qui doivent respecter les conditions de continuité et de continuité de la dérivée première à la normale de la surface v=Cste.

$$\Omega=[0,\mu_0]\times[0,\infty]=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3\to\Omega_1=[0,\mu_0]\times[0,\nu_1] \quad ,\Omega_2=[0,\mu_0]\times[\nu_1,\nu_2] \quad , \quad \Omega_3=[0,\mu_0]\times[\nu_2,\infty]$$

$$T_{\Omega_1}(\mu,\nu)\Big|_{\substack{\mu=\mu_0\\ \nu\in[0,\nu_1]}}=0 \quad T_{\Omega_2}(\mu,\nu)\Big|_{\substack{\mu=\mu_0\\ \nu\in[\nu_1,\nu_2]}}=T_0 \quad T_{\Omega_3}(\mu,\nu)\Big|_{\substack{\mu=\mu_0\\ \nu\in[\nu_2,\infty]}}=0$$

$$T_{\Omega_1}(\mu,\nu)\Big|_{\substack{\mu\in[0,\mu_0]\\ \nu=\nu_1}}=T_{\Omega_2}(\mu,\nu)\Big|_{\substack{\mu\in[0,\mu_0]\\ \nu=\nu_1}} \quad T_{\Omega_2}(\mu,\nu)\Big|_{\substack{\mu\in[0,\mu_0]\\ \nu=\nu_2}}=T_{\Omega_3}(\mu,\nu)\Big|_{\substack{\mu\in[0,\mu_0]\\ \nu=\nu_2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\frac{\partial T_{\Omega_1}(\mu,\nu)}{\partial\nu}\Bigg|_{\substack{\mu\in[0,\mu_0]\\ \nu=\nu_1}}=\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\frac{\partial T_{\Omega_2}(\mu,\nu)}{\partial\nu}\Bigg|_{\substack{\mu\in[0,\mu_0]\\ \nu=\nu_1}} \quad \frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\frac{\partial T_{\Omega_2}(\mu,\nu)}{\partial\nu}\Bigg|_{\substack{\mu\in[0,\mu_0]\\ \nu=\nu_2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\frac{\partial T_{\Omega_3}(\mu,\nu)}{\partial\nu}\Bigg|_{\substack{\mu\in[0,\mu_0]\\ \nu=\nu_2}}$$

Le troisième problème est un problème aux limites homogène et extérieur qui a la solution suivante :

$$T_{\Omega_3}(\mu,\nu)=\frac{2}{\mu_0{}^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{D_n J_0(\lambda_n\,\mu)K_0(\lambda_n\,\nu)}{(J_1(\lambda_n\,\mu_0))^2 K_0(\lambda_n\,\nu_2)} \quad \lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n\,\mu_0)=0 \quad avec \quad D_n=\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,J_0(\lambda_n\,\mu)T_{\Omega_2}(\mu,\nu_2)$$

Le premier problème est un problème aux limites homogène et intérieur qui a la solution suivante :

$$T_{\Omega_1}(\mu,\nu)=\frac{2}{\mu_0{}^2}\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\frac{J_0(\lambda_n\,\mu)I_0(\lambda_n\,\nu)}{(J_1(\lambda_n\,\mu_0))^2 I_0(\lambda_n\,\nu_1)} \quad \lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n\,\mu_0)=0 \quad avec \quad A_n=\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,J_0(\lambda_n\,\mu)T_{\Omega_2}(\mu,\nu_1)$$

.

La décomposition de l'unité est obtenue avec une fonction limite du problème de Dirichlet intérieur égale à 1, et sa valeur prise sur la surface v= v_1 :

$$f_{v_0}^{int}(\mu)=1 \Rightarrow T(\mu,v_1)=1=\frac{2}{\mu_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\lambda_n\,\mu)}{\lambda_n J_1(\lambda_n\,\mu_0)}$$

La solution du deuxième problème moyennant une décomposition intermédiaire pour revenir un problème homogène, se pré sente comme suit :

$$T_{\Omega_2}(\mu,v)=T_0\,\frac{2}{\mu_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\lambda_n\,\mu)}{\lambda_n J_1(\lambda_n\,\mu_0)}+\frac{2}{\mu_0^{\;2}}\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\,\frac{J_0(\lambda_n\,\mu)}{(J_1(\lambda_n\,\mu_0))^2}\,\frac{\left(\dfrac{I_0(\lambda_n v)}{I_0(\lambda_n v_1)}-\dfrac{K_0(\lambda_n v)}{K_0(\lambda_n v_1)}\right)}{\left(\dfrac{I_0(\lambda_n v_2)}{I_0(\lambda_n v_1)}-\dfrac{K_0(\lambda_n v_2)}{K_0(\lambda_n v_1)}\right)}+$$

$$+\frac{2}{\mu_0^{\;2}}\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\,\frac{J_0(\lambda_n\,\mu)}{(J_1(\lambda_n\,\mu_0))^2}\,\frac{\left(\dfrac{I_0(\lambda_n v)}{I_0(\lambda_n v_2)}-\dfrac{K_0(\lambda_n v)}{K_0(\lambda_n v_2)}\right)}{\left(\dfrac{I_0(\lambda_n v_1)}{I_0(\lambda_n v_2)}-\dfrac{K_0(\lambda_n v_1)}{K_0(\lambda_n v_2)}\right)}$$

$$\lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n\,\mu_0)=0 \quad et \quad B_n=\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,J_0(\lambda_n\,\mu)T_{\Omega_3}(\mu,v_2) \quad C_n=\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,J_0(\lambda_n\,\mu)T_{\Omega_1}(\mu,v_1)$$

Tous les coefficients A_n, B_n, C_n et D_n sont pris comme tels, des inconnus du problème à résoudre.
Les condition de continuité sur la surface v= v_1 donne :

$$\Rightarrow\begin{cases}T_0\,\dfrac{2}{\mu_0}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{J_0(\lambda_n\,\mu)}{\lambda_n J_1(\lambda_n\,\mu_0)}+\dfrac{2}{\mu_0^{\;2}}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\,\dfrac{J_0(\lambda_n\,\mu)}{(J_1(\lambda_n\,\mu_0))^2}=\dfrac{2}{\mu_0^{\;2}}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\,\dfrac{J_0(\lambda_n\,\mu)}{(J_1(\lambda_n\,\mu_0))^2}\\ T_0\,\dfrac{2}{\mu_0}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{J_0(\lambda_n\,\mu)}{\lambda_n J_1(\lambda_n\,\mu_0)}+\dfrac{2}{\mu_0^{\;2}}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\,\dfrac{J_0(\lambda_n\,\mu)}{(J_1(\lambda_n\,\mu_0))^2}=\dfrac{2}{\mu_0^{\;2}}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}D_n\,\dfrac{J_0(\lambda_n\,\mu)}{(J_1(\lambda_n\,\mu_0))^2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A_n=C_n+\dfrac{\mu_0 J_1(\lambda_n\,\mu_0)T_0}{\lambda_n}\\ D_n=B_n+\dfrac{\mu_0 J_1(\lambda_n\,\mu_0)T_0}{\lambda_n}\end{cases}$$

Il reste à établir la condition de continuité de la dérivée première, sachant que :

$$\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu_1}}\frac{2}{\mu_0{}^2}\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\frac{J_0(\lambda_n\mu)}{\left(J_1(\lambda_n\mu_0)\right)^2}\frac{\left.\frac{dI_0(\lambda_n\nu)}{d\nu}\right|_{\nu=\nu_1}}{I_0(\lambda_n\nu_1)}=\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu_1}}\frac{2}{\mu_0{}^2}\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\frac{J_0(\lambda_n\mu)}{\left(J_1(\lambda_n\mu_0)\right)^2}\frac{\left(\frac{\left.\frac{dI_0(\lambda_n\nu)}{d\nu}\right|_{\nu=\nu_1}}{I_0(\lambda_n\nu_1)}-\frac{\left.\frac{dK_0(\lambda_n\nu)}{d\nu}\right|_{\nu=\nu_1}}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}{\left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu_1}}\frac{2}{\mu_0{}^2}\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\frac{J_0(\lambda_n\mu)}{\left(J_1(\lambda_n\mu_0)\right)^2}\frac{\left(\frac{1}{I_0(\lambda_n\nu_2)}\left.\frac{dI_0(\lambda_n\nu)}{d\nu}\right|_{\nu=\nu_1}-\frac{1}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\left.\frac{dK_0(\lambda_n\nu)}{d\nu}\right|_{\nu=\nu_1}\right)}{\left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}$$

$$\frac{dI_0(\lambda_n\nu)}{d\nu}=\lambda_nI_1(\lambda_n\nu)\quad et\quad\frac{dK_0(\lambda_n\nu)}{d\nu}=-\lambda_nK_1(\lambda_n\nu)$$

$$\Rightarrow A_n\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}=B_n\frac{\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}{\left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}+C_n\frac{\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}{\left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}$$

De même :

$$\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu_2}}\frac{2}{\mu_0{}^2}\sum_{n=1}^{+\infty}D_n\frac{J_0(\lambda_n\mu)}{\left(J_1(\lambda_n\mu_0)\right)^2}\frac{\left.\frac{dK_0(\lambda_n\nu)}{d\nu}\right|_{\nu=\nu_2}}{K_0(\lambda_n\nu_2)}=\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu_2}}\frac{2}{\mu_0{}^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\begin{array}{l}B_n\frac{J_0(\lambda_n\mu)}{\left(J_1(\lambda_n\mu_0)\right)^2}\times\\ \times\frac{\left(\frac{\left.\frac{dI_0(\lambda_n\nu)}{d\nu}\right|_{\nu=\nu_2}}{I_0(\lambda_n\nu_1)}-\frac{\left.\frac{dK_0(\lambda_n\nu)}{d\nu}\right|_{\nu=\nu_2}}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}{\left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}\end{array}\right\}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu_2}}\frac{2}{\mu_0{}^2}\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\frac{J_0(\lambda_n\mu)}{\left(J_1(\lambda_n\mu_0)\right)^2}\frac{\left(\frac{1}{I_0(\lambda_n\nu_2)}\left.\frac{dI_0(\lambda_n\nu)}{d\nu}\right|_{\nu=\nu_2}-\frac{1}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\left.\frac{dK_0(\lambda_n\nu)}{d\nu}\right|_{\nu=\nu_2}\right)}{\left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}$$

$$\frac{dI_0(\lambda_n\nu)}{d\nu}=\lambda_nI_1(\lambda_n\nu)\quad et\quad\frac{dK_0(\lambda_n\nu)}{d\nu}=-\lambda_nK_1(\lambda_n\nu)$$

$$\Rightarrow -D_n\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}=B_n\frac{\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}{\left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}+C_n\frac{\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}{\left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}$$

$$A_n \frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)} = B_n \frac{\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}{\left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)} + C_n \frac{\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}{\left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}$$

Il vient :

$$\Rightarrow -D_n \frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)} = B_n \frac{\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}{\left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)} + C_n \frac{\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}{\left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}$$

Posons :

$$A'_n = \frac{A_n}{I_0(\lambda_n\nu_1)} \quad B'_n = \frac{B_n}{\left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)} \quad C'_n = \frac{C_n}{\left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)} \quad D'_n = \frac{D_n}{K_0(\lambda_n\nu_2)}$$

Alors le système linéaire se simplifie un peu... :

$$\begin{cases} A'_n I_0(\lambda_n\nu_1) = C'_n \left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right) + \frac{\mu_0 J_1(\lambda_n\mu_0)T_0}{\lambda_n} \\ D'_n K_0(\lambda_n\nu_2) = B'_n \left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right) + \frac{\mu_0 J_1(\lambda_n\mu_0)T_0}{\lambda_n} \\ B'_n \left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right) + C'_n \left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right) = A'_n I_1(\lambda_n\nu_1) \\ B'_n \left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right) + C'_n \left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right) = -D'_n K_1(\lambda_n\nu_2) \end{cases}$$

$$U = \frac{\mu_0 J_1(\lambda_n\mu_0)T_0}{\lambda_n} \Rightarrow \begin{cases} A'_n = \frac{C'_n}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right) + \frac{U}{I_0(\lambda_n\nu_1)} \\ D'_n = \frac{B'_n}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right) + \frac{U}{K_0(\lambda_n\nu_2)} \end{cases}$$

il vient :

$$B'_n \left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right) + C'_n \left(\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\frac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right) = U\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}$$

$$B'_n \left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\frac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\right) + C'_n \left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right) = -U\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}$$

Résolvons ce système avec les coefficients B'n et C'n. Le déterminant s'écrit :

$$\Delta = \left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right) -$$

$$\left(\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\frac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\frac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{\begin{pmatrix} (I_0(\lambda_n\nu_1)K_0(\lambda_n\nu_2) - I_0(\lambda_n\nu_2)K_0(\lambda_n\nu_1))(I_1(\lambda_n\nu_1)K_0(\lambda_n\nu_1) + I_0(\lambda_n\nu_1)K_1(\lambda_n\nu_1))\times \\ (I_1(\lambda_n\nu_2)K_0(\lambda_n\nu_2) + I_0(\lambda_n\nu_2)K_1(\lambda_n\nu_2)) \end{pmatrix}}{I_0(\lambda_n\nu_1)^2 I_0(\lambda_n\nu_2) K_0(\lambda_n\nu_1) K_0(\lambda_n\nu_2)^2}$$

$$\Rightarrow \Delta = \left(1 - \frac{I_0(\lambda_n\nu_2)K_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)$$

La solution pour B'n et C'n a la forme :

$$\frac{B'_n}{U}=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)} & \left(\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)\\ -\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)} & \left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)\end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$=\frac{\left[\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\left(\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)\right]}{\Delta}$$

$$=\frac{\left[\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)\right]}{\left(1-\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)K_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}$$

$$\frac{B'_n}{U}=\frac{\left[\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\Big/\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\Big/\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)\right]}{\left(1-\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)K_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}$$

$$-\frac{C'_n}{U}=\frac{\begin{vmatrix}\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right) & -\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\\ \left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\right) & \dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$=\frac{\left[\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)+\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\right)\right]}{\Delta}$$

$$=\frac{\left[\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)+\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)\right]}{\left(1-\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)K_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}$$

$$\frac{C'_n}{U}=-\frac{\left[\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\Big/\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)+\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\Big/\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)\right]}{\left(1-\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)K_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}$$

$$\frac{B'_n}{U}=\frac{\left[\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\bigg/\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\bigg/\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)\right]}{\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\left(\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}-\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}$$

$$\frac{C'_n}{U}=-\frac{\left[\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\bigg/\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)+\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\bigg/\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)\right]}{\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\left(\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}-\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}$$

$$B_n=B'_n\left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)\quad C_n=C'_n\left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{B_n}{U}=-\frac{\left[\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\bigg/\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\bigg/\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)\right]}{\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}}$$

$$\Rightarrow\frac{C_n}{U}=-\frac{\left[\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\bigg/\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)+\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\bigg/\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)\right]}{\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}}$$

Pour les coefficients An et Dn, cela donne :

$$\frac{A_n}{U}=1+\frac{C'_n}{U}\left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{A_n}{U}=1-$$

$$-\frac{\left[\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\bigg/\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)+\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\bigg/\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)\right]\left(\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}-\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}{\left(1-\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)K_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}$$

$$\frac{D_n}{U}=1+\frac{B'_n}{U}\left(\frac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}-\frac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{D_n}{U}=1+$$

$$\frac{\left[\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\bigg/\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\bigg/\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)\right]\left(\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}-\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}{\left(1-\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)K_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}$$

$$\frac{A_n}{U}=1-\left[\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\bigg/\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\frac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}\bigg/\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)\right]$$

$$\frac{D_n}{U}=1-\left[\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\bigg/\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)+\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\frac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\bigg/\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)\right]$$

Ce qui donne finalement :

$$\frac{A_n}{U}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)-\\ \left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\frac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)\right)\end{array}\right\}}{\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}-\\ \left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\frac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\frac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)\end{array}\right\}}{\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}$$

$$=\frac{\left\{\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)-\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\frac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)\right\}}{\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}$$

$$\Rightarrow\frac{A_n}{U}=\frac{\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}}{\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}-\frac{\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\frac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}}{\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}$$

$$\frac{D_n}{U}=1-\left[\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\frac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\Big/\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\Big/\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\frac{D_n}{U}=\frac{\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}}{\left(\frac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\frac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}-\frac{\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\frac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}}{\left(\frac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}+\frac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}$$

.

La première forme de la solution se présente comme suit :

$\lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n\, \mu_0)=0 \quad U=$

$$T_{\Omega_1}(\mu,\nu)=\frac{2}{\mu_0}T_0\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}}{\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}-\frac{\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}}{\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}\right)\frac{J_0(\lambda_n\mu)I_0(\lambda_n\nu)}{\lambda_nJ_1(\lambda_n\mu_0)I_0(\lambda_n\nu_1)}$$

$$T_{\Omega_2}(\mu,\nu)=T_{\Omega_2}(\mu,\nu)=T_0\frac{2}{\mu_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\lambda_n\mu)}{\lambda_nJ_1(\lambda_n\mu_0)}+$$

$$-T_0\frac{2}{\mu_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\lambda_n\mu)}{\lambda_nJ_1(\lambda_n\mu_0)}\frac{\left(\dfrac{I_0(\lambda_n\nu)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}-\dfrac{K_0(\lambda_n\nu)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}{\left(\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}-\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}\frac{\left[\dfrac{\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}}{\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}+\dfrac{\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}}{\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}\right]}{\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}}+$$

$$-T_0\frac{2}{\mu_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\lambda_n\mu)}{\lambda_nJ_1(\lambda_n\mu_0)}\frac{\left(\dfrac{I_0(\lambda_n\nu)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}-\dfrac{K_0(\lambda_n\nu)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}{\left(\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}-\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}\frac{\left[\dfrac{\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}}{\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}+\dfrac{\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}}{\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}\right]}{\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}}$$

$$T_{\Omega_3}(\mu,\nu)=\frac{2}{\mu_0}T_0\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}}{\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}-\frac{\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}}{\left(\dfrac{I_1(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_1(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}\right)\frac{J_0(\lambda_n\mu)K_0(\lambda_n\nu)}{\lambda_nJ_1(\lambda_n\mu_0)K_0(\lambda_n\nu_2)}$$

.

Que nous allons tenter de simplifier, si cela est possible :

$$T_{\Omega_1}(\mu,\nu)=\frac{2}{\mu_0}T_0\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_1(\lambda_n\nu_1)}}{\left(\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_1(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_1(\lambda_n\nu_1)}\right)}-\frac{\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_1(\lambda_n\nu_2)}}{\left(\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_1(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_1(\lambda_n\nu_2)}\right)}\right)\frac{J_0(\lambda_n\mu)I_0(\lambda_n\nu)}{\lambda_nJ_1(\lambda_n\mu_0)I_0(\lambda_n\nu_1)}$$

$$T_{\Omega_3}(\mu,\nu)=\frac{2}{\mu_0}T_0\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_1(\lambda_n\nu_2)}}{\left(\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_1(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_1(\lambda_n\nu_2)}\right)}-\frac{\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_1(\lambda_n\nu_1)}}{\left(\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_1(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_1(\lambda_n\nu_1)}\right)}\right)\frac{J_0(\lambda_n\mu)K_0(\lambda_n\nu)}{\lambda_nJ_1(\lambda_n\mu_0)K_0(\lambda_n\nu_2)}$$

$$T_{\Omega_2}(\mu,\nu)=T_{\Omega_2}(\mu,\nu)=T_0\frac{2}{\mu_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\lambda_n\mu)}{\lambda_nJ_1(\lambda_n\mu_0)}+$$

$$-T_0\frac{2}{\mu_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\lambda_n\mu)}{\lambda_nJ_1(\lambda_n\mu_0)}\frac{\left(\dfrac{I_0(\lambda_n\nu)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}-\dfrac{K_0(\lambda_n\nu)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}{\left(\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_0(\lambda_n\nu_1)}-\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_0(\lambda_n\nu_1)}\right)}\left[\frac{\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_1(\lambda_n\nu_1)}}{\left(\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_1(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_1(\lambda_n\nu_1)}\right)}+\frac{\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_1(\lambda_n\nu_2)}}{\left(\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_1(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_1(\lambda_n\nu_2)}\right)}\right]+$$

$$-T_0\frac{2}{\mu_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\lambda_n\mu)}{\lambda_nJ_1(\lambda_n\mu_0)}\frac{\left(\dfrac{I_0(\lambda_n\nu)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}-\dfrac{K_0(\lambda_n\nu)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}{\left(\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_0(\lambda_n\nu_2)}-\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_0(\lambda_n\nu_2)}\right)}\left[\frac{\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_1(\lambda_n\nu_1)}}{\left(\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_1(\lambda_n\nu_1)}+\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_1)}{K_1(\lambda_n\nu_1)}\right)}+\frac{\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_1)}{I_1(\lambda_n\nu_2)}}{\left(\dfrac{I_0(\lambda_n\nu_2)}{I_1(\lambda_n\nu_2)}+\dfrac{K_0(\lambda_n\nu_2)}{K_1(\lambda_n\nu_2)}\right)}\right]$$

Paraboloïde plein fini de révolution soumis à des conditions aux limites dépendantes de l'angle azimutal

Exemple *: on revient maintenant à un problème à trois dimensions, sur un paraboloïde de révolution plein* $(\mu,\nu,\varphi)\in\Omega=[0,\mu_0]\times[0,\nu_0]\times[0,2\pi]$ *dans lequel les conditions dépendent maintenant de l'angle azimutal sur le paraboloïde de révolution :*

$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}\right)+\frac{1}{\mu^2\nu^2}\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

$$(\mu,\nu,\varphi)\in\Omega=[0,\mu_0]\times[0,\nu_0]\times[0,2\pi]\quad T(\mu,\nu,\varphi)\ fini$$

$$Cas\ envisagés : Dirichlet\ ou\ Neumann \Rightarrow \alpha^{\mu}_{\mu_0}\in\{0,1\}\quad \beta^{\mu}_{\mu_0}\in\{0,1\}\quad \alpha^{\nu}_{\nu_0}\in\{0,1\}\quad \beta^{\nu}_{\nu_0}\in\{0,1\}$$

$$C.L.\quad \alpha^{\mu}_{\mu_0}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial n}+\beta^{\mu}_{\mu_0}T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\mu=\mu_0}=f_{\mu_0}(\nu,\varphi)\rightarrow\frac{\alpha^{\mu}_{\mu_0}}{\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta^{\mu}_{\mu_0}T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\mu=\mu_0}=f_{\mu_0}(\nu,\varphi)$$

$$\alpha^{\nu}_{\nu_0}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial n}+\beta^{\nu}_{\nu_0}T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\nu=\nu_0}=f_{\nu_0}(\mu,\varphi)\rightarrow\frac{\alpha^{\nu}_{\nu_0}}{\sqrt{\mu^2+{\nu_0}^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta^{\nu}_{\nu_0}T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\nu=\nu_0}=f_{\nu_0}(\mu,\varphi)$$

Problème que l'on sépare comme à l'habitude en deux sous-problèmes avec d'abord les conditions homogènes dans la direction μ :

$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T_{\mu_0}(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial T_{\mu_0}(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 T_{\mu_0}(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial T_{\mu_0}(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}\right)+\frac{1}{\mu^2\nu^2}\frac{\partial^2 T_{\mu_0}(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

$$(\mu,\nu,\varphi)\in\Omega=[0,\mu_0]\times[0,\nu_0]\times[0,2\pi]\quad T(\mu,\nu,\varphi)\ fini$$

$$C.L.\quad \frac{\alpha^{\mu}_{\mu_0}}{\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}}\frac{\partial T_{\mu_0}(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta^{\mu}_{\mu_0}T_{\mu_0}(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\mu=\mu_0}=0$$

$$\frac{\alpha^{\nu}_{\nu_0}}{\sqrt{\mu^2+{\nu_0}^2}}\frac{\partial T_{\mu_0}(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta^{\nu}_{\nu_0}T_{\mu_0}(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\nu=\nu_0}=f_{\nu_0}(\mu,\varphi)$$

Et celui homogène dans la direction ν :

$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T_{\nu_0}(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial T_{\nu_0}(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 T_{\nu_0}(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial T_{\nu_0}(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}\right)+\frac{1}{\mu^2\nu^2}\frac{\partial^2 T_{\nu_0}(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

$$(\mu,\nu,\varphi)\in\Omega=[0,\mu_0]\times[0,\nu_0]\times[0,2\pi]\quad T(\mu,\nu,\varphi)\ fini$$

$$C.L.\quad \frac{\alpha^{\mu}_{\mu_0}}{\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}}\frac{\partial T_{\nu_0}(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta^{\mu}_{\mu_0}T_{\nu_0}(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\mu=\mu_0}=f_{\mu_0}(\nu,\varphi)$$

$$\frac{\alpha^{\nu}_{\nu_0}}{\sqrt{\mu^2+{\nu_0}^2}}\frac{\partial T_{\nu_0}(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta^{\nu}_{\nu_0}T_{\nu_0}(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\nu=\nu_0}=0$$

Prenons les deux problèmes, la représentation sous forme de séries des solutions, compte tenu de la finitude de la solution est facile à obtenir :

$$\left.\begin{array}{l} T_{\mu_0}(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}J_m(\lambda_{m,n}\,\mu)I_m(\lambda_{m,n}\,\nu)(A_{m,n}Cos(m\varphi)+B_{m,n}Sin(m\varphi)) \\ T_{\nu_0}(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}I_m(\lambda_{m,n}\,\mu)J_m(\lambda_{m,n}\,\nu)(A_{m,n}Cos(m\varphi)+B_{m,n}Sin(m\varphi)) \end{array}\right\}\Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi)=T_{\mu_0}(\mu,\nu,\varphi)+T_{\nu_0}(\mu,\nu,\varphi)$$

Comme d'habitude on introduit les symétries de révolution sur l'angle azimutal ϕ, liées à une décomposition en 8 termes (2x4) des deux fonctions limites :

Propriétés de symétrie	Symbole de symétrie	Fonctions propres utilisées dans le cas d'un solide de révolution complète en angle φ creux ou plein
$f_{\nu_0}(\mu,\varphi)=f_{\nu_0}(\mu,\pi-\varphi)\quad et\quad f_{\nu_0}(\mu,\varphi)=f_{\nu_0}(\mu,-\varphi)$ $f_{\mu_0}(\nu,\varphi)=f_{\mu_0}(\nu,\pi-\varphi)\quad et\quad f_{\mu_0}(\nu,\varphi)=f_{\mu_0}(\nu,-\varphi)$	Y+,X+	$Cos(2m\varphi)$
$f_{\nu_0}(\mu,\varphi)=f_{\nu_0}(\mu,\pi-\varphi)\quad et\quad f_{\nu_0}(\mu,\varphi)=-f_{\nu_0}(\mu,-\varphi)$ $f_{\mu_0}(\nu,\varphi)=f_{\mu_0}(\nu,\pi-\varphi)\quad et\quad f_{\mu_0}(\nu,\varphi)=-f_{\mu_0}(\nu,-\varphi)$	Y+,X-	$Sin((2m+1)\varphi)$
$f_{\nu_0}(\mu,\varphi)=-f_{\nu_0}(\mu,\pi-\varphi)\quad et\quad f_{\nu_0}(\mu,\varphi)=f_{\nu_0}(\mu,-\varphi)$ $f_{\mu_0}(\nu,\varphi)=-f_{\mu_0}(\nu,\pi-\varphi)\quad et\quad f_{\mu_0}(\nu,\varphi)=f_{\mu_0}(\nu,-\varphi)$	Y-,X+	$Cos((2m+1)\varphi)$
$f_{\nu_0}(\mu,\varphi)=-f_{\nu_0}(\mu,\pi-\varphi)\quad et\quad f_{\nu_0}(\mu,\varphi)=-f_{\nu_0}(\mu,-\varphi)$ $f_{\mu_0}(\nu,\varphi)=-f_{\mu_0}(\nu,\pi-\varphi)\quad et\quad f_{\mu_0}(\nu,\varphi)=-f_{\mu_0}(\nu,-\varphi)$	Y-,X-	$Sin(2m\varphi)$

Les décompositions par symétrie sont :

$$f_{\nu_0}(\mu,\varphi)=f_{\nu_0,Y+,X+}(\mu,\varphi)+f_{\nu_0,Y+,X-}(\mu,\theta)+f_{\nu_0,Y-,X+}(\mu,\theta)+f_{\nu_0,Y-,X-}(\mu,\theta),sachant\,que\;f_{\nu_0}(\mu,\varphi)=f_{\nu_0}(\mu,2\pi+\varphi)$$

$$f_{\nu_0,Y+,X+}(\mu,\varphi)=\frac{f_{\nu_0}(\mu,\varphi)+f_{\nu_0}(\mu,\pi-\varphi)+f_{\nu_0}(\mu,-\varphi)+f_{\nu_0}(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\nu_0,Y+,X-}(\mu,\varphi)=\frac{f_{\nu_0}(\mu,\varphi)+f_{\nu_0}(\mu,\pi-\varphi)-f_{\nu_0}(\mu,-\varphi)-f_{\nu_0}(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\nu_0,Y-,X+}(\mu,\varphi)=\frac{f_{\nu_0}(\mu,\varphi)-f_{\nu_0}(\mu,\pi-\varphi)+f_{\nu_0}(\mu,-\varphi)-f_{\nu_0}(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\nu_0,Y-,X-}(\mu,\varphi)=\frac{f_{\nu_0}(\mu,\varphi)-f_{\nu_0}(\mu,\pi-\varphi)-f_{\nu_0}(\mu,-\varphi)+f_{\nu_0}(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\mu_0}(\nu,\varphi)=f_{\mu_0,Y+,X+}(\nu,\varphi)+f_{\mu_0,Y+,X-}(\nu,\theta)+f_{\mu_0,Y-,X+}(\nu,\theta)+f_{\mu_0,Y-,X-}(\nu,\theta),sachant\,que\;f_{\mu_0}(\nu,\varphi)=f_{\mu_0}(\nu,2\pi+\varphi)$$

$$f_{\mu_0,Y+,X+}(\nu,\varphi)=\frac{f_{\mu_0}(\nu,\varphi)+f_{\mu_0}(\nu,\pi-\varphi)+f_{\mu_0}(\nu,-\varphi)+f_{\mu_0}(\nu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\mu_0,Y+,X-}(\nu,\varphi)=\frac{f_{\mu_0}(\nu,\varphi)+f_{\mu_0}(\nu,\pi-\varphi)-f_{\mu_0}(\nu,-\varphi)-f_{\mu_0}(\nu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\mu_0,Y-,X+}(\nu,\varphi)=\frac{f_{\mu_0}(\nu,\varphi)-f_{\mu_0}(\nu,\pi-\varphi)+f_{\mu_0}(\nu,-\varphi)-f_{\mu_0}(\nu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\mu_0,Y-,X-}(\nu,\varphi)=\frac{f_{\mu_0}(\nu,\varphi)-f_{\mu_0}(\nu,\pi-\varphi)-f_{\mu_0}(\nu,-\varphi)+f_{\mu_0}(\nu,\varphi-\pi)}{4}$$

On rappelle que les normes des fonctions de Bessel d'ordre m se calculent ainsi :

$$M_{m,n}^{\mu_0}(\mu)=J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\quad N_{m,n}^{\nu_0}(\nu)=J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\nu_0\right)$$

$$\left\|M_{m,n}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2=\frac{\left[\left(\mu^2\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\right)^2\left(J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu\right)\right)^2+\left(J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu\right)\right)^2\left(\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\right)^2\mu^2-m^2\right)\right)\right]_0^{\mu_0}}{2\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\right)^2}$$

$$\left\|M_{m,n}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2=\frac{\mu_0{}^2\left(\left(J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu_0\right)\right)^2+\left(J_m(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu_0)\right)^2\left(1-\frac{m^2}{\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\right)^2\mu_0{}^2}\right)\right)}{2}$$

Autre formule

$$\left\|M_{m,n}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2=\frac{\mu_0{}^2\left(\left(J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu_0\right)\right)^2-J_{m-1}(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu_0)J_{m+1}(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu_0)\right)}{2}$$

$$\left\|N_{m,n}^{\nu_0}(\nu)\right\|^2=\frac{\nu_0{}^2\left(\left(J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\nu_0\right)\right)^2+\left(J_m(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\nu_0)\right)^2\left(1-\frac{m^2}{\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\right)^2\nu_0{}^2}\right)\right)}{2}$$

Autre formule

$$\left\|N_{m,n}^{\nu_0}(\nu)\right\|^2=\frac{\nu_0{}^2\left(\left(J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\nu_0\right)\right)^2-J_{m+1}(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\nu_0)J_{m-1}(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\nu_0)\right)}{2}$$

$$A_{2m,n}^{\mu_0,Y+,X+}=\frac{4\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,\frac{J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\ f_{\nu_0,Y+,X+}(\mu,\varphi)Cos(2m\varphi)}{\left(\alpha_{\nu_0}^{\nu}\lambda_{2m,n}^{\mu_0}I_{2m}'\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\nu_0\right)+\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,\beta_{\nu_0}^{\nu}\ I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)\right)}}{\pi\left(1+\partial_{2m,0}\right)\left\|M_{2m,n}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2}$$

$$A_{2m+1,n}^{\mu_0,Y+,X-}=\frac{4\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,\frac{J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\ f_{\nu_0,Y+,X-}(\mu,\varphi)Sin((2m+1)\varphi)}{\left(\alpha_{\nu_0}^{\nu}\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}I_{2m+1}'\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\nu_0\right)+\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,\beta_{\nu_0}^{\nu}\ I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)\right)}}{\pi\left\|M_{2m+1,n}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2}$$

$$A_{2m+1,n}^{\mu_0,Y-,X+}=\frac{4\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,\frac{J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\ f_{\nu_0,Y-,X+}(\mu,\varphi)Cos((2m+1)\varphi)}{\left(\alpha_{\nu_0}^{\nu}\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}I_{2m+1}'\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\nu_0\right)+\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,\beta_{\nu_0}^{\nu}\ I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)\right)}}{\pi\left\|M_{2m+1,n}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2}$$

$$A_{2m,n}^{\mu_0,Y-,X-}=\frac{4\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,\frac{J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\ f_{\nu_0,Y-,X-}(\mu,\varphi)Sin(2m\varphi)}{\left(\alpha_{\nu_0}^{\nu}\lambda_{2m,n}^{\mu_0}I_{2m}'\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\nu_0\right)+\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,\beta_{\nu_0}^{\nu}\ I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)\right)}}{\pi\left\|M_{2m,n}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2}$$

.

Problème aux limites de Laplace – système de coordonnées paraboliques de révolution -

Le système de fonctions propres et les intégrales des coefficients des développements en série pour les solutions homogènes en μ :

$$M_{m,n}^{\mu_0}(\mu)=J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\quad M_{m,n}^{\mu_0}{}'(\mu)=\lambda_{m,n}^{\mu_0}J_m{}'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu\right)=\lambda_{m,n}^{\mu_0}J_{m-1}\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)-\frac{m}{\mu}J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)$$

$$\lambda_{m,n}^{\mu_0}\quad tq\quad \alpha_{\mu_0}^{\mu}\left(m\,J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu_0\right)-\mu_0\lambda_{m,n}^{\mu_0}J_{m-1}\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu_0\right)\right)=\mu_0\beta_{\mu_0}^{\mu}\,J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu_0\right)$$

$$\lambda_{m,n}^{\mu_0}I_m{}'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\nu_0\right)=\lambda_{m,n}^{\mu_0}I_{m-1}\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)-\frac{m}{\nu_0}I_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)$$

$$N_{m,n}^{\nu_0}(\nu)=J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\,\nu\right)\quad N_{m,n}^{\nu_0}{}'(\nu)=\lambda_{m,n}^{\nu_0}J_m{}'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\nu\right)=\lambda_{m,n}^{\nu_0}J_{m-1}\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\,\nu\right)-\frac{m}{\nu}J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\,\nu\right)$$

$$\lambda_{m,n}^{\nu_0}\quad tq\quad \alpha_{\nu_0}^{\nu}\left(m\,J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\nu_0\right)-\nu_0\lambda_{m,n}^{\nu_0}J_{m-1}\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\,\nu_0\right)\right)=\mu_0\beta_{\nu_0}^{\nu}\,J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\nu_0\right)$$

$$\lambda_{m,n}^{\nu_0}I_m{}'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\mu_0\right)=\lambda_{m,n}^{\nu_0}I_{m-1}\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\,\mu_0\right)-\frac{m}{\mu_0}I_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\,\mu_0\right)$$

$$\left\|M_{m,n}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2=\frac{\mu_0{}^2\left(\left(J_m{}'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu_0\right)\right)^2+\left(J_m(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu_0)\right)^2\left(1-\frac{m^2}{\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\right)^2\mu_0{}^2}\right)\right)}{2}$$

$$\left\|N_{m,n}^{\nu_0}(\nu)\right\|^2=\frac{\nu_0{}^2\left(\left(J_m{}'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\nu_0\right)\right)^2+\left(J_m(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\nu_0)\right)^2\left(1-\frac{m^2}{\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\right)^2\nu_0{}^2}\right)\right)}{2}$$

$$A_{2m,n}^{\mu_0,Y+,X+}=\frac{4\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,\frac{J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\,f_{\nu_0,Y+,X+}(\mu,\varphi)Cos(2m\varphi)}{\left(\alpha_{\nu_0}^{\nu}\lambda_{2m,n}^{\mu_0}I_{2m}{}'\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\nu_0\right)+\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,\beta_{\nu_0}^{\nu}\,I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)\right)}}{\pi\left(1+\partial_{2m,0}\right)\left\|M_{2m,n}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2}$$

$$A_{2m+1,n}^{\mu_0,Y+,X-}=\frac{4\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,\frac{J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\,f_{\nu_0,Y+,X-}(\mu,\varphi)Sin((2m+1)\varphi)}{\left(\alpha_{\nu_0}^{\nu}\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}I_{2m+1}{}'\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\nu_0\right)+\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,\beta_{\nu_0}^{\nu}\,I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)\right)}}{\pi\left\|M_{2m+1,n}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2}$$

$$A_{2m+1,n}^{\mu_0,Y-,X+}=\frac{4\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,\frac{J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\,f_{\nu_0,Y-,X+}(\mu,\varphi)Cos((2m+1)\varphi)}{\left(\alpha_{\nu_0}^{\nu}\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}I_{2m+1}{}'\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\nu_0\right)+\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,\beta_{\nu_0}^{\nu}\,I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)\right)}}{\pi\left\|M_{2m+1,n}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2}$$

$$A_{2m,n}^{\mu_0,Y-,X-}=\frac{4\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,\frac{J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\,f_{\nu_0,Y-,X-}(\mu,\varphi)Sin(2m\varphi)}{\left(\alpha_{\nu_0}^{\nu}\lambda_{2m,n}^{\mu_0}I_{2m}{}'\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\nu_0\right)+\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}\,\beta_{\nu_0}^{\nu}\,I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)\right)}}{\pi\left\|M_{2m,n}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2}$$

Les intégrales de la solution homogène en v, et la solution générale sous la forme de 8 développements en série :

$$A_{2m,n}^{\nu_0,Y+,X+}=\frac{4\int_0^{\nu_0}d\nu\,\nu\,\dfrac{J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\nu\right)\sqrt{\mu_0^{\,2}+\nu^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\ f_{\mu_0,Y+,X+}(\nu,\varphi)Cos(2m\varphi)}{\left(\alpha_{\mu_0}^{\mu}\lambda_{2m,n}^{\nu_0}I_{2m}'\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\mu_0\right)+\sqrt{\mu_0^{\,2}+\nu^2}\,\beta_{\mu_0}^{\mu}\ I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\mu_0\right)\right)}}{\pi\left(1+\partial_{2m,0}\right)\left\|N_{2m,n}^{\nu_0}(\nu)\right\|^2}$$

$$A_{2m+1,n}^{\nu_0,Y+,X-}=\frac{4\int_0^{\nu_0}d\nu\,\nu\,\dfrac{J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\nu\right)\sqrt{\mu_0^{\,2}+\nu^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\ f_{\mu_0,Y+,X-}(\nu,\varphi)Sin((2m+1)\varphi)}{\left(\alpha_{\mu_0}^{\mu}\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}I_{2m+1}'\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\mu_0\right)+\sqrt{\mu_0^{\,2}+\nu^2}\,\beta_{\mu_0}^{\mu}\ I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\mu_0\right)\right)}}{\pi\left\|N_{2m+1,n}^{\nu_0}(\nu)\right\|^2}$$

$$A_{2m+1,n}^{\nu_0,Y-,X+}=\frac{4\int_0^{\nu_0}d\nu\,\nu\,\dfrac{J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\nu\right)\sqrt{\mu_0^{\,2}+\nu^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\ f_{\mu_0,Y-,X+}(\nu,\varphi)Cos((2m+1)\varphi)}{\left(\alpha_{\mu_0}^{\mu}\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}I_{2m+1}'\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\mu_0\right)+\sqrt{\mu_0^{\,2}+\nu^2}\,\beta_{\mu_0}^{\mu}\ I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\mu_0\right)\right)}}{\pi\left\|N_{2m+1,n}^{\nu_0}(\nu)\right\|^2}$$

$$A_{2m,n}^{\nu_0,Y-,X-}=\frac{4\int_0^{\nu_0}d\nu\,\nu\,\dfrac{J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\nu\right)\sqrt{\mu_0^{\,2}+\nu^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\ f_{\mu_0,Y-,X-}(\nu,\varphi)Sin(2m\varphi)}{\left(\alpha_{\mu_0}^{\mu}\lambda_{2m,n}^{\nu_0}I_{2m}'\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\mu_0\right)+\sqrt{\mu_0^{\,2}+\nu^2}\,\beta_{\mu_0}^{\mu}\ I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\mu_0\right)\right)}}{\pi\left\|N_{2m,n}^{\nu_0}(\nu)\right\|^2}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m,n}^{\mu_0,Y+,X+}J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\mu\right)I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\nu\right)Cos(2m\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m+1,n}^{\mu_0,Y+,X-}J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\mu\right)I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\nu\right)Sin((2m+1)\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m+1,n}^{\mu_0,Y-,X+}J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\mu\right)I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\nu\right)Cos((2m+1)\varphi)+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m,n}^{\mu_0,Y-,X-}J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\mu\right)I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\nu\right)Sin(2m\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m,n}^{\nu_0,Y+,X+}I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\mu\right)J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\nu\right)Cos(2m\varphi)+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m+1,n}^{\nu_0,Y+,X-}I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\mu\right)J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\nu\right)Sin((2m+1)\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m+1,n}^{\nu_0,Y-,X+}I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\mu\right)J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\nu\right)Cos((2m+1)\varphi)+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m,n}^{\nu_0,Y-,X-}I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\mu\right)J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\nu\right)Sin(2m\varphi)$$

.

Dans ce problème il ne faut pas omettre les solutions de valeurs propres nulles. Lorsque la fonction propre azimutale est de valeur propre nulle, soit une constante, alors les solutions en μ et ν sont des fonctions de Bessel et Bessel modifiées d'ordre zéro. Elles ne changent pas de nature fondamentalement et elles sont aussi prises en considération dans la sommation de la série. Le seul cas où la solution de valeur propre nulle change de nature est lorsque

$$m = 0 \quad et \quad \lambda_{0,n}^{\mu_0} = 0 \quad ou \quad m = 0 \quad et \quad \lambda_{0,n}^{\nu_0} = 0$$

Et dans ce cas nous avons vu que les fonctions solutions sont de la forme A+BLog(μ) et C+DLog(ν). Du fait des conditions de finitude en ν=0 et μ=0, la forme s'impose comme étant une constante tant en μ que ν, constante qui ne peut-être solution de l'équation de Laplace avec respect des conditions aux limites que si la condition aux limites homogènes en μ est de Neumann. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
&Problème\ homogène\ en\ \mu \\
&\alpha_{\mu_0}^{\mu} = 1 \quad et \quad \beta_{\mu_0}^{\mu} = 0 \\
&A_0 = \frac{1}{\mu_0{}^2 \beta_{\nu_0}^{\nu} \pi} \int_0^{\mu_0} d\mu\, \mu \int_0^{2\pi} d\varphi\, f_{\nu_0}(\mu, \varphi) \\
&Si \quad \beta_{\nu_0}^{\nu} = 0 \quad A_0 \quad est\ une\ constante\ quelconque\ puisque\ \left.\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu}\right|_{\mu=\mu_0} = 0\ et\ \left.\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu}\right|_{\nu=\nu_0} = 0 \\
&Problème\ homogène\ en\ \nu \\
&\alpha_{\nu_0}^{\nu} = 1 \quad et \quad \beta_{\nu_0}^{\nu} = 0 \\
&A_0 = \frac{1}{\nu_0{}^2 \beta_{\mu_0}^{\mu} \pi} \int_0^{\nu_0} d\nu\, \nu \int_0^{2\pi} d\varphi\, f_{\mu_0}(\nu, \varphi) \\
&Si \quad \beta_{\mu_0}^{\mu} = 0 \quad A_0 \quad est\ une\ constante\ quelconque\ puisque\ \left.\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu}\right|_{\mu=\mu_0} = 0\ et\ \left.\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu}\right|_{\nu=\nu_0} = 0
\end{aligned}$$

Pour la solution du problème homogène de Neumann en μ, il vient :

$$\alpha_{\mu_0}^{\mu}=1 \quad \beta_{\mu_0}^{\mu}=0 \quad M_{m,n}^{\mu_0}(\mu)=J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\mu\right) \quad \lambda_{m,n}^{\mu_0} \quad tq \quad \lambda_{m,n}^{\mu_0}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu\right)=0 \quad \left\|M_{m,n}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2=\frac{\mu_0^{\,2}\left(J_m(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu_0)\right)^2\left(1-\dfrac{m^2}{\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\right)^2\mu_0^{\,2}}\right)}{2}$$

$$M_{m,n}^{\mu_0}{}'(\mu)=\lambda_{m,n}^{\mu_0}J_{m-1}\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)-\frac{m}{\mu}J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\mu\right) \quad \lambda_{m,n}^{\mu_0}I_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\nu_0\right)=\lambda_{m,n}^{\mu_0}I_{m-1}\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)-\frac{m}{\nu_0}I_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)$$

$$A_0=\frac{1}{\mu_0^{\,2}\beta_{\nu_0}^{\nu}\pi}\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\int_0^{2\pi}d\varphi\, f_{\nu_0}(\mu,\varphi) \quad A_{2m,n}^{\mu_0,Y+,X+}=\frac{8\displaystyle\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,\frac{J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\,2}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\, f_{\nu_0,Y+,X+}(\mu,\varphi)Cos(2m\varphi)}{\left(\alpha_{\nu_0}^{\nu}\lambda_{2m,n}^{\mu_0}I_{2m}'\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\nu_0\right)+\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\,2}}\,\beta_{\nu_0}^{\nu}\,I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)\right)}}{\pi\left(1+\partial_{2m,0}\right)\mu_0^{\,2}\left(J_{2m}(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\mu_0)\right)^2\left(1-\dfrac{4m^2}{\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\right)^2\mu_0^{\,2}}\right)}$$

$$A_{2m+1,n}^{\mu_0,Y+,X-}=\frac{8\displaystyle\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,\frac{J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\,2}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\, f_{\nu_0,Y+,X-}(\mu,\varphi)Sin((2m+1)\varphi)}{\left(\alpha_{\nu_0}^{\nu}\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}I_{2m+1}'\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\nu_0\right)+\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\,2}}\,\beta_{\nu_0}^{\nu}\,I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)\right)}}{\pi\,\mu_0^{\,2}\left(J_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\mu_0)\right)^2\left(1-\dfrac{(2m+1)^2}{\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\right)^2\mu_0^{\,2}}\right)}$$

$$A_{2m+1,n}^{\mu_0,Y-,X+}=\frac{8\displaystyle\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,\frac{J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\,2}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\, f_{\nu_0,Y-,X+}(\mu,\varphi)Cos((2m+1)\varphi)}{\left(\alpha_{\nu_0}^{\nu}\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}I_{2m+1}'\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\nu_0\right)+\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\,2}}\,\beta_{\nu_0}^{\nu}\,I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)\right)}}{\pi\,\mu_0^{\,2}\left(J_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\mu_0)\right)^2\left(1-\dfrac{(2m+1)^2}{\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\right)^2\mu_0^{\,2}}\right)}$$

$$A_{2m,n}^{\mu_0,Y-,X-}=\frac{8\displaystyle\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,\frac{J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\,2}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\, f_{\nu_0,Y-,X-}(\mu,\varphi)Sin(2m\varphi)}{\left(\alpha_{\nu_0}^{\nu}\lambda_{2m,n}^{\mu_0}I_{2m}'\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\nu_0\right)+\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\,2}}\,\beta_{\nu_0}^{\nu}\,I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)\right)}}{\mu_0^{\,2}\left(J_{2m}(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\mu_0)\right)^2\left(1-\dfrac{4m^2}{\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\right)^2\mu_0^{\,2}}\right)}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=A_0+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m,n}^{\mu_0,Y+,X+}J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\nu\right)Cos(2m\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m+1,n}^{\mu_0,Y+,X-}J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\mu\right)I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\nu\right)Sin((2m+1)\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m+1,n}^{\mu_0,Y-,X+}J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\mu\right)I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\nu\right)Cos((2m+1)\varphi)+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m,n}^{\mu_0,Y-,X-}J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\nu\right)Sin(2m\varphi)$$

Cas particuliers si $\beta_{\nu_0}^{\nu}=0\Rightarrow A_0$ *constante quelconque*

.

Pour la solution du problème homogène de Neumann en ν, il vient :

$\alpha_{\nu_0}^{\nu} = 1 \quad \beta_{\nu_0}^{\nu} = 0$

$$N_{m,n}^{\nu_0}(\nu) = J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\nu\right) \quad \lambda_{m,n}^{\nu_0} \quad tq \quad \lambda_{m,n}^{\nu_0} J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\nu_0\right) = 0 \quad \left\|N_{m,n}^{\nu_0}(\nu)\right\|^2 = \frac{\nu_0^2\left(\left(J_m(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\nu_0)\right)^2\left(1-\frac{m^2}{\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\right)^2\nu_0^2}\right)\right)}{2}$$

$$N_{m,n}^{\nu_0}{}'(\nu) = \lambda_{m,n}^{\nu_0}J_{m-1}\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\nu\right) - \frac{m}{\nu}J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\nu\right) \quad \lambda_{m,n}^{\nu_0}I_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\mu_0\right) = \lambda_{m,n}^{\nu_0}I_{m-1}\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\mu_0\right) - \frac{m}{\mu_0}I_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\mu_0\right)$$

$$A_0 = \frac{1}{\nu_0^2\beta_{\mu_0}^{\mu}\pi}\int_0^{\nu_0}d\nu\,\nu\int_0^{2\pi}d\varphi\, f_{\mu_0}(\nu,\varphi) \quad A_{2m,n}^{\nu_0,Y+,X+} = \frac{8\int_0^{\nu_0}d\nu\,\nu\,\frac{J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\nu\right)\sqrt{\mu_0^2+\nu^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\, f_{\mu_0,Y+,X+}(\nu,\varphi)Cos(2m\varphi)}{\left(\alpha_{\mu_0}^{\mu}\lambda_{2m,n}^{\nu_0}I_{2m}'\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\mu_0\right)+\sqrt{\mu_0^2+\nu^2}\,\beta_{\mu_0}^{\mu}I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\mu_0\right)\right)}}{\pi\left(1+\partial_{2m,0}\right)\nu_0^2\left(\left(J_{2m}(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\nu_0)\right)^2\left(1-\frac{4m^2}{\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\right)^2\nu_0^2}\right)\right)}$$

$$A_{2m+1,n}^{\nu_0,Y+,X-} = \frac{8\int_0^{\nu_0}d\nu\,\nu\,\frac{J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\nu\right)\sqrt{\mu_0^2+\nu^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\, f_{\mu_0,Y+,X-}(\nu,\varphi)Sin((2m+1)\varphi)}{\left(\alpha_{\mu_0}^{\mu}\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}I_{2m+1}'\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\mu_0\right)+\sqrt{\mu_0^2+\nu^2}\,\beta_{\mu_0}^{\mu}I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\mu_0\right)\right)}}{\pi\nu_0^2\left(\left(J_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\nu_0)\right)^2\left(1-\frac{(2m+1)^2}{\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\right)^2\nu_0^2}\right)\right)}$$

$$A_{2m+1,n}^{\nu_0,Y-,X+} = \frac{8\int_0^{\nu_0}d\nu\,\nu\,\frac{J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\nu\right)\sqrt{\mu_0^2+\nu^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\, f_{\mu_0,Y-,X+}(\nu,\varphi)Cos((2m+1)\varphi)}{\left(\alpha_{\mu_0}^{\mu}\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}I_{2m+1}'\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\mu_0\right)+\sqrt{\mu_0^2+\nu^2}\,\beta_{\mu_0}^{\mu}I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\mu_0\right)\right)}}{\pi\nu_0^2\left(\left(J_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\nu_0)\right)^2\left(1-\frac{(2m+1)^2}{\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\right)^2\nu_0^2}\right)\right)}$$

$$A_{2m,n}^{\nu_0,Y-,X-} = \frac{8\int_0^{\nu_0}d\nu\,\nu\,\frac{J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\nu\right)\sqrt{\mu_0^2+\nu^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\, f_{\mu_0,Y-,X-}(\nu,\varphi)Sin(2m\varphi)}{\left(\alpha_{\mu_0}^{\mu}\lambda_{2m,n}^{\nu_0}I_{2m}'\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\mu_0\right)+\sqrt{\mu_0^2+\nu^2}\,\beta_{\mu_0}^{\mu}I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\mu_0\right)\right)}}{\pi\nu_0^2\left(\left(J_{2m}(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\nu_0)\right)^2\left(1-\frac{4m^2}{\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\right)^2\nu_0^2}\right)\right)}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi) = A_0 + \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m,n}^{\nu_0,Y+,X+}I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\mu\right)J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\nu\right)Cos(2m\varphi) +$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m+1,n}^{\nu_0,Y+,X-}I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\mu\right)J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\nu\right)Sin((2m+1)\varphi) +$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m+1,n}^{\nu_0,Y-,X+}I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\mu\right)J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\nu\right)Cos((2m+1)\varphi) + \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m,n}^{\nu_0,Y-,X-}I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\mu\right)J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\nu\right)Sin(2m\varphi)$$

Cas particuliers si $\beta_{\mu_0}^{\mu} = 0 \Rightarrow A_0$ *constante quelconque*

.

Exemple : Paraboloïde de révolution plein $(\mu,\nu,\varphi)\in\Omega=[0,\mu_0]\times[0,\nu_0]\times[0,2\pi]$ aux conditions aux limites de Dirichlet, homogènes et inhomogènes

On va simplifier le résultat en se plaçant systématiquement avec des conditions aux limites de Dirichlet, homogènes et inhomogènes :

$$\alpha_{\mu_0}^{\mu}=\alpha_{\nu_0}^{\nu}=0 \quad \beta_{\mu_0}^{\mu}=\beta_{\nu_0}^{\nu}=1 \Rightarrow \lambda_{m,n}^{\mu_0} \quad tq \quad J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu_0\right)=0 \quad \lambda_{m,n}^{\nu_0} \quad tq \quad J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\nu_0\right)=0$$

$$M_{m,n}^{\mu_0}(\mu)=J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\mu\right) \quad J_m{}'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu_0\right)=J_{m-1}\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\mu_0\right)=-J_{m+1}\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\mu_0\right) \quad \left\|M_{m,n}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2=\frac{\mu_0{}^2\left(J_{m+1}\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\mu_0\right)\right)^2}{2}$$

$$N_{m,n}^{\nu_0}(\nu)=J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\,\nu\right) \quad J_m{}'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\nu_0\right)=J_{m-1}\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\,\nu_0\right)=-J_{m+1}\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\,\nu_0\right) \quad \left\|N_{m,n}^{\nu_0}(\nu)\right\|^2=\frac{\nu_0{}^2\left(J_{m+1}\left(\lambda_{m,n}^{\nu_0}\,\nu_0\right)\right)^2}{2}$$

$$A_{2m,n}^{\mu_0,Y+,X+}=\frac{8\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\; f_{\nu_0,Y+,X+}(\mu,\varphi)Cos(2m\varphi)}{\pi\,\mu_0{}^2\left(1+\partial_{2m,0}\right)\left(J_{2m+1}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\mu_0\right)\right)^2 I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)}$$

$$A_{2m+1,n}^{\mu_0,Y+,X-}=\frac{8\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\; f_{\nu_0,Y+,X-}(\mu,\varphi)Sin((2m+1)\varphi)}{\pi\,\mu_0{}^2\left(J_{2m+2}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\mu_0\right)\right)^2 I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)}$$

$$A_{2m+1,n}^{\mu_0,Y-,X+}=\frac{8\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\; f_{\nu_0,Y-,X+}(\mu,\varphi)Cos((2m+1)\varphi)}{\pi\,\mu_0{}^2\left(J_{2m+2}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\mu_0\right)\right)^2 I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)}$$

$$A_{2m,n}^{\mu_0,Y-,X-}=\frac{8\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\; f_{\nu_0,Y-,X-}(\mu,\varphi)Sin(2m\varphi)}{\pi\,\mu_0{}^2\left(J_{2m+1}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\mu_0\right)\right)^2 I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)}$$

$$A_{2m,n}^{\nu_0,Y+,X+}=\frac{8\int_0^{\nu_0}d\nu\,\nu\,J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\,\nu\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\; f_{\mu_0,Y+,X+}(\nu,\varphi)Cos(2m\varphi)}{\pi\,\nu_0{}^2\left(1+\partial_{2m,0}\right)\left(J_{2m+1}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\nu_0\right)\right)^2 I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\,\mu_0\right)}$$

$$A_{2m+1,n}^{\nu_0,Y+,X-}=\frac{8\int_0^{\nu_0}d\nu\,\nu\,J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\nu\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\; f_{\mu_0,Y+,X-}(\nu,\varphi)Sin((2m+1)\varphi)}{\pi\,\nu_0{}^2\left(J_{2m+2}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\nu_0\right)\right)^2 I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\,\mu_0\right)}$$

$$A_{2m+1,n}^{\nu_0,Y-,X+}=\frac{8\int_0^{\nu_0}d\nu\,\nu\,J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\,\nu\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\; f_{\mu_0,Y-,X+}(\nu,\varphi)Cos((2m+1)\varphi)}{\pi\,\nu_0{}^2\left(J_{2m+2}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\nu_0\right)\right)^2 I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\,\mu_0\right)}$$

$$A_{2m,n}^{\nu_0,Y-,X-}=\frac{8\int_0^{\nu_0}d\nu\,\nu\,J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\,\nu\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\; f_{\mu_0,Y-,X-}(\nu,\varphi)Sin(2m\varphi)}{\pi\,\nu_0{}^2\left(J_{2m+1}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\nu_0\right)\right)^2 I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\,\mu_0\right)}$$

.

Soit la solution avec des conditions aux limites de Dirichlet :

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m,n}^{\mu_0,Y+,X+}J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\nu\right)Cos(2m\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m+1,n}^{\mu_0,Y+,X-}J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\mu\right)I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\nu\right)Sin((2m+1)\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m+1,n}^{\mu_0,Y-,X+}J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\mu\right)I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\nu\right)Cos((2m+1)\varphi)+$$

$$+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m,n}^{\mu_0,Y-,X-}J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\nu\right)Sin(2m\varphi)$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m,n}^{\nu_0,Y+,X+}I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\,\mu\right)J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\,\nu\right)Cos(2m\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m+1,n}^{\nu_0,Y+,X-}I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\,\mu\right)J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\,\nu\right)Sin((2m+1)\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m+1,n}^{\nu_0,Y-,X+}I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\,\mu\right)J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\nu_0}\,\nu\right)Cos((2m+1)\varphi)+$$

$$+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m,n}^{\nu_0,Y-,X-}I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\,\mu\right)J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\,\nu\right)Sin(2m\varphi)$$

.

Exemple : Paraboloïde de révolution plein $(\mu,\nu,\varphi)\in\Omega=[0,\mu_0]\times[0,\nu_0]\times[0,2\pi]$ aux conditions aux limites de Dirichlet, homogènes et inhomogènes, sans dépendance azimutal φ.

Simplifions encore plus en supposant que les conditions aux limites ne dépendent pas de l'angle azimutal φ. Dans ces conditions seuls subsistent les deux termes de symétrie Y+,X+ , soit :

$$\alpha_{\mu_0}^{\mu}=\alpha_{\nu_0}^{\nu}=0\quad\beta_{\mu_0}^{\mu}=\beta_{\nu_0}^{\nu}=1\rightarrow m=0\,(voir\;plus\,loin)\Rightarrow\lambda_{0,n}^{\mu_0}\quad tq\quad J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\mu_0\right)=0\quad\lambda_{0,n}^{\nu_0}\quad tq\quad J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_0}\nu_0\right)=0$$

$$\left\|M_{0,n}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2=\frac{\mu_0^{\,2}\left(J_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\,\mu_0\right)\right)^2}{2}\qquad\left\|N_{0,n}^{\nu_0}(\nu)\right\|^2=\frac{\nu_0^{\,2}\left(J_1\left(\lambda_{0,n}^{\nu_0}\,\nu_0\right)\right)^2}{2}$$

$$\int_0^{\pi}d\varphi\,Cos(2m\varphi)=\pi\,\partial_{2m,0}\Rightarrow A_{0,n}^{\mu_0,Y+,X+}=\frac{2\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\,\mu\right)f_{\nu_0}(\mu)}{\mu_0^{\,2}\left(J_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\mu_0\right)\right)^2I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)}\quad A_{2m,n}^{\nu_0,Y+,X+}=\frac{2\int_0^{\nu_0}d\nu\,\nu\,J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_0}\,\nu\right)f_{\mu_0}(\nu)}{\nu_0^{\,2}\left(J_1\left(\lambda_{0,n}^{\nu_0}\nu_0\right)\right)^2I_{2m}\left(\lambda_{0,n}^{\nu_0}\,\mu_0\right)}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=T(\mu,\nu)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_{0,n}^{\mu_0,Y+,X+}J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\,\mu\right)I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\,\nu\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}A_{0,n}^{\nu_0,Y+,X+}I_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_0}\,\mu\right)J_0\left(\lambda_{2m,n}^{\nu_0}\,\nu\right)$$

Ce qui est exactement la solution trouvée auparavant dans le cas d'un paraboloïde de révolution dont les conditions aux limites ne dépendent pas de l'angle azimutal.

Exemple : Paraboloïde de révolution plein symétrique $\mu_0 = \nu_0 = \eta_0 \Rightarrow (\mu,\nu,\varphi) \in \Omega = [0,\eta_0]\times[0,\eta_0]\times[0,2\pi]$ soumis aux conditions aux limites de Dirichlet, homogènes et inhomogènes entièrement anti-symétrique : $C.L. \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\mu=\eta_0} = f(\nu,\varphi) \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\eta_0} = -f(\mu,\varphi)$. La symétrie du domaine implique que le système de valeur propres est identique pour les deux sous-problèmes homogène en μ et en ν Les deux fonctions limites sont également strictement identiques, et il vient une solution de la forme :

$$\lambda_{m,n} \quad tq \quad J_m(\lambda_{m,n}\eta_0) = 0 \quad M_{m,n}(\mu) = J_m(\lambda_{m,n}\,\mu) \quad N_{m,n}(\nu) = J_m(\lambda_{m,n}\,\nu) \quad \left\|M^{\mu_0}_{m,n}(\mu)\right\|^2 = \left\|N^{\nu_0}_{m,n}(\nu)\right\|^2 = \frac{\eta_0^{\,2}\left(J_{m+1}(\lambda_{m,n}\,\eta_0)\right)^2}{2}$$

$$A^{Y+,X+}_{2m,n} = \frac{8\int_0^{\eta_0} d\mu\,\mu\, J_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\mu)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\; f_{Y+,X+}(\mu,\varphi)Cos(2m\varphi)}{\pi\,\eta_0^{\,2}(1+\partial_{2m,0})(J_{2m+1}(\lambda_{2m,n}\eta_0))^2 I_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\eta_0)} \quad A^{Y+,X-}_{2m+1,n} = \frac{8\int_0^{\eta_0} d\mu\,\mu\, J_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\mu)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\; f_{Y+,X-}(\mu,\varphi)Sin((2m+1)\varphi)}{\pi\,\eta_0^{\,2}(J_{2m+2}(\lambda_{2m+1,n}\,\eta_0))^2 I_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\eta_0)}$$

$$A^{Y-,X+}_{2m+1,n} = \frac{8\int_0^{\eta_0} d\mu\,\mu\, J_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\mu)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\; f_{Y-,X+}(\mu,\varphi)Cos((2m+1)\varphi)}{\pi\,\eta_0^{\,2}(J_{2m+2}(\lambda_{2m+1,n}\,\eta_0))^2 I_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\eta_0)} \quad A^{Y-,X-}_{2m,n} = \frac{8\int_0^{\eta_0} d\mu\,\mu\, J_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\mu)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\; f_{Y-,X-}(\mu,\varphi)Sin(2m\varphi)}{\pi\;\eta_0^{\,2}(J_{2m+1}(\lambda_{2m,n}\eta_0))^2 I_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\eta_0)}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi) = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} A^{Y+,X+}_{2m,n}\left\{J_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\mu)I_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\nu) - I_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\mu)J_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\nu)\right\}Cos(2m\varphi) +$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} A^{Y+,X-}_{2m+1,n}\left\{J_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\mu)I_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\nu) - I_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\mu)J_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\nu)\right\}Sin((2m+1)\varphi) +$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} A^{Y-,X+}_{2m+1,n}\left\{J_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\mu)I_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\nu) - I_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\mu)J_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\nu)\right\}Cos((2m+1)\varphi) +$$

$$+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} A^{\mu_0,Y-,X-}_{2m,n}\left\{J_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\mu)I_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\nu) - I_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\mu)J_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\nu)\right\}Sin(2m\varphi)$$

$$\Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi) = -T(\nu,\mu,\varphi) \quad et \quad T(\mu,\mu,\varphi) = 0$$

Cette solution est parfaitement anti-symétrique en permutant μ et ν, et s'annule lorsque μ = ν. Donc cette solution est également solution du problème aux limites mixte sur un demi-paraboloïde de révolution, soit avec les conditions aux limites : $C.L. \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\mu=\nu} = 0 \quad et \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\mu=\eta_0} = f(\nu,\varphi)$

Si la fonction limite n'a pas de dépendance azimutale, il vient :

$$\lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n\eta_0) = 0 \quad A_n = \int_0^{\eta_0} d\mu\,\mu\, J_0(\lambda_n\,\mu)f(\mu) \Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{A_n\left\{J_0(\lambda_n\,\mu)I_0(\lambda_n\,\nu) - I_0(\lambda_n\,\mu)J_0(\lambda_n\,\nu)\right\}}{\eta_0^{\,2}(J_1(\lambda_n\eta_0))^2 I_0(\lambda_n\,\eta_0)}.$$

Exemple : Paraboloïde de révolution plein symétrique $\mu_0 = \nu_0 = \eta_0 \Rightarrow (\mu,\nu,\varphi) \in \Omega = [0,\eta_0]\times[0,\eta_0]\times[0,2\pi]$ soumis aux conditions aux limites de Dirichlet, homogènes et inhomogènes entièrement symétrique : $C.L.\quad T(\mu,\nu,\varphi)|_{\mu=\eta_0} = f(\nu,\varphi)\quad T(\mu,\nu,\varphi)|_{\nu=\eta_0} = f(\mu,\varphi)$. La symétrie du domaine implique que le système de valeur propres est identique pour les deux sous-problèmes homogène en μ et en ν Les deux fonctions limites sont également strictement identiques, et il vient une solution de la forme :

$$\lambda_{m,n}\quad tq\quad J_m(\lambda_{m,n}\eta_0) = 0\quad M_{m,n}(\mu) = J_m(\lambda_{m,n}\,\mu)\quad N_{m,n}(\nu) = J_m(\lambda_{m,n}\,\nu)\quad \left\|M^{\mu_0}_{m,n}(\mu)\right\|^2 = \left\|N^{\nu_0}_{m,n}(\nu)\right\|^2 = \frac{\eta_0^{\,2}(J_{m+1}(\lambda_{m,n}\,\eta_0))^2}{2}$$

$$A^{Y+,X+}_{2m,n} = \frac{8\int_0^{\eta_0} d\mu\,\mu\,J_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\mu)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\; f_{Y+,X+}(\mu,\varphi)Cos(2m\varphi)}{\pi\,\eta_0^{\,2}(1+\partial_{2m,0})(J_{2m+1}(\lambda_{2m,n}\eta_0))^2 I_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\eta_0)}\quad A^{Y+,X-}_{2m+1,n} = \frac{8\int_0^{\eta_0} d\mu\,\mu\,J_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\mu)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\; f_{Y+,X-}(\mu,\varphi)Sin((2m+1)\varphi)}{\pi\,\eta_0^{\,2}(J_{2m+2}(\lambda_{2m+1,n}\,\eta_0))^2 I_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\eta_0)}$$

$$A^{Y-,X+}_{2m+1,n} = \frac{8\int_0^{\eta_0} d\mu\,\mu\,J_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\mu)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\; f_{Y-,X+}(\mu,\varphi)Cos((2m+1)\varphi)}{\pi\,\eta_0^{\,2}(J_{2m+2}(\lambda_{2m+1,n}\,\eta_0))^2 I_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\eta_0)}\quad A^{Y-,X-}_{2m,n} = \frac{8\int_0^{\eta_0} d\mu\,\mu\,J_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\mu)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\; f_{Y-,X-}(\mu,\varphi)Sin(2m\varphi)}{\pi\,\eta_0^{\,2}(J_{2m+1}(\lambda_{2m,n}\eta_0))^2 I_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\eta_0)}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi) = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} A^{Y+,X+}_{2m,n}\{J_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\mu)I_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\nu) + I_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\mu)J_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\nu)\}Cos(2m\varphi) +$$
$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} A^{Y+,X-}_{2m+1,n}\{J_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\mu)I_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\nu) + I_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\mu)J_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\nu)\}Sin((2m+1)\varphi) +$$
$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} A^{Y-,X+}_{2m+1,n}\{J_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\mu)I_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\nu) + I_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\mu)J_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}\,\nu)\}Cos((2m+1)\varphi) +$$
$$+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} A^{\mu_0,Y-,X-}_{2m,n}\{J_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\mu)I_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\nu) + I_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\mu)J_{2m}(\lambda_{2m,n}\,\nu)\}Sin(2m\varphi)$$
$$\Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi) = T(\nu,\mu,\varphi)$$

Cette solution est parfaitement symétrique en permutant μ et ν.

Si la fonction limite n'a pas de dépendance azimutale, il vient :

$$\lambda_n\quad tq\quad J_0(\lambda_n\eta_0) = 0\quad A_n = \int_0^{\eta_0} d\mu\,\mu\,J_0(\lambda_n\,\mu)f(\mu) \Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{A_n\{J_0(\lambda_n\,\mu)I_0(\lambda_n\,\nu) + I_0(\lambda_n\,\mu)J_0(\lambda_n\,\nu)\}}{\eta_0^{\,2}(J_1(\lambda_n\eta_0))^2 I_0(\lambda_n\,\eta_0)}.$$

Exemple *: Paraboloïde de révolution plein* $(\mu,\nu,\varphi)\in\Omega=[0,\mu_0]\times[0,\nu_0]\times[0,2\pi]$ *aux conditions aux limites homogènes de Neumann sur μ et de Dirichlet inhomogènes sur ν, avec dépendance azimutal ϕ. Les conditions aux limites s'écrivent :*

$$\alpha_{\mu_0}^{\mu}=1 \quad \beta_{\mu_0}^{\mu}=0 \quad f_{\mu_0}(\nu,\varphi)=0 \quad \alpha_{\nu_0}^{\nu}=0 \quad \beta_{\nu_0}^{\nu}=1$$

$$\left.\frac{\alpha_{\mu_0}^{\mu}}{\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta_{\mu_0}^{\mu}\,T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\mu=\mu_0}=f_{\mu_0}(\nu,\varphi)\Rightarrow\left.\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}\right|_{\mu=\mu_0}=0$$

$$\left.\frac{\alpha_{\nu_0}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+{\nu_0}^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta_{\nu_0}^{\nu}\,T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_0}=f_{\nu_0}(\mu,\varphi)\Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_0}=f_{\nu_0}(\mu,\varphi)$$

La solution s'écrit :

$$\left.\begin{matrix}\alpha_{\mu_0}^{\mu}=1 & \beta_{\mu_0}^{\mu}=0\\ \alpha_{\nu_0}^{\nu}=0 & \beta_{\nu_0}^{\nu}=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\lambda_{m,n}^{\mu_0}\quad tq\quad \lambda_{m,n}^{\mu_0}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu_0\right)=0\quad M_{m,n}^{\mu_0}(\mu)=J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)$$

$$M_{m,n}^{\mu_0}{}'(\mu)=\lambda_{m,n}^{\mu_0}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu\right)=\lambda_{m,n}^{\mu_0}J_{m-1}\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)-\frac{m}{\mu}J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)$$

$$\left\|M_{m,n}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2=\frac{{\mu_0}^2\left(J_m(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu_0)\right)^2}{2}\left(1-\frac{m^2}{\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\right)^2{\mu_0}^2}\right)=\frac{\left(J_m(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu_0)\right)^2}{2\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\right)^2}\left(\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\right)^2{\mu_0}^2-m^2\right)$$

$$A_0=\frac{1}{{\mu_0}^2\pi}\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\int_0^{2\pi}d\varphi\,f_{\nu_0}(\mu,\varphi)\qquad A_{2m,n}^{\mu_0,Y+,X+}=\frac{8\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\right)^2\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\,f_{\nu_0,Y+,X+}(\mu,\varphi)Cos(2m\varphi)}{\pi\left(1+\partial_{2m,0}\right)I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)\left(J_{2m}(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\mu_0)\right)^2\left(\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\right)^2{\mu_0}^2-4m^2\right)}$$

$$A_{2m+1,n}^{\mu_0,Y+,X-}=\frac{8\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\right)^2\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\,f_{\nu_0,Y+,X-}(\mu,\varphi)Sin((2m+1)\varphi)}{\pi\,I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)\left(J_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\mu_0)\right)^2\left(\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\right)^2{\mu_0}^2-(2m+1)^2\right)}$$

$$A_{2m+1,n}^{\mu_0,Y-,X+}=\frac{8\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\right)^2\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\,f_{\nu_0,Y-,X+}(\mu,\varphi)Cos((2m+1)\varphi)}{\pi\,I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)\left(J_{2m+1}(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\mu_0)\right)^2\left(\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\right)^2{\mu_0}^2-(2m+1)^2\right)}$$

$$A_{2m,n}^{\mu_0,Y-,X-}=\frac{8\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\right)^2\int_0^{\mu_0}d\mu\,\mu\,J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\,f_{\nu_0,Y-,X-}(\mu,\varphi)Sin(2m\varphi)}{\pi\,I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\nu_0\right)\left(J_{2m}(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\mu_0)\right)^2\left(\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\right)^2{\mu_0}^2-4m^2\right)}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=A_0+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m,n}^{\mu_0,Y+,X+}J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\nu\right)Cos(2m\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m+1,n}^{\mu_0,Y+,X-}J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\mu\right)I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\nu\right)Sin((2m+1)\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m+1,n}^{\mu_0,Y-,X+}J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\mu\right)I_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n}^{\mu_0}\,\nu\right)Cos((2m+1)\varphi)+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{2m,n}^{\mu_0,Y-,X-}J_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)I_{2m}\left(\lambda_{2m,n}^{\mu_0}\,\nu\right)Sin(2m\varphi)$$

Si l'on prend une condition aux limites inhomogènes en Y-,X- de la forme :

$$f_{\nu_0}(\mu,\varphi)=\begin{cases}1 \quad \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad et \quad -1 \quad \varphi\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right] \\ 1 \quad \varphi\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right] \quad et \quad -1 \quad \varphi\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\nu_0}(\mu,\varphi)=-f_{\nu_0}(\mu,\pi-\varphi)=-f_{\nu_0}(\mu,3\pi-\varphi) \quad et \quad f_{\nu_0}(\mu,\varphi)=-f_{\nu_0}(\mu,-\varphi)=-f_{\nu_0}(\mu,2\pi-\varphi)$$

Sur un paraboloïde de révolution totalement symétrique, cela donne la solution suivante :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\ f_{\nu_0,Y-,X-}(\varphi)=0 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\ f_{\nu_0,Y-,X-}(\varphi)Sin(2m\varphi)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\ Sin(2m\varphi)=\frac{1}{m}Sin^2\left(\frac{m\pi}{2}\right)=\begin{cases}\frac{1}{m} \quad si \quad m=2p+1 \\ 0 \quad si \quad m=2p\end{cases}$$

$$\nu_0=\mu_0=\eta_0 \quad \lambda_{4p+2,n}^{\mu_0}\to\lambda_{p,n} \quad tq \quad \lambda_{p,n}J_{4p+2}'(\lambda_{p,n}\eta_0)=0 \qquad \left\|M_{p,n}(\mu)\right\|^2=\frac{\left(J_{4p+2}(\lambda_{p,n}\eta_0)\right)^2}{2(\lambda_{p,n})^2}\left((\lambda_{p,n})^2\eta_0^{\ 2}-4(2p+1)^2\right)$$

$$M_{p,n}(\mu)=J_{4p+2}(\lambda_{p,n}\ \mu) \quad M_{p,n}'(\mu)=\lambda_{p,n}J_{4p+2}'(\lambda_{p,n}\mu)=\lambda_{p,n}J_{4p+1}(\lambda_{p,n}\ \mu)-\frac{4p+2}{\mu}J_{4p+2}(\lambda_{p,n}\ \mu)$$

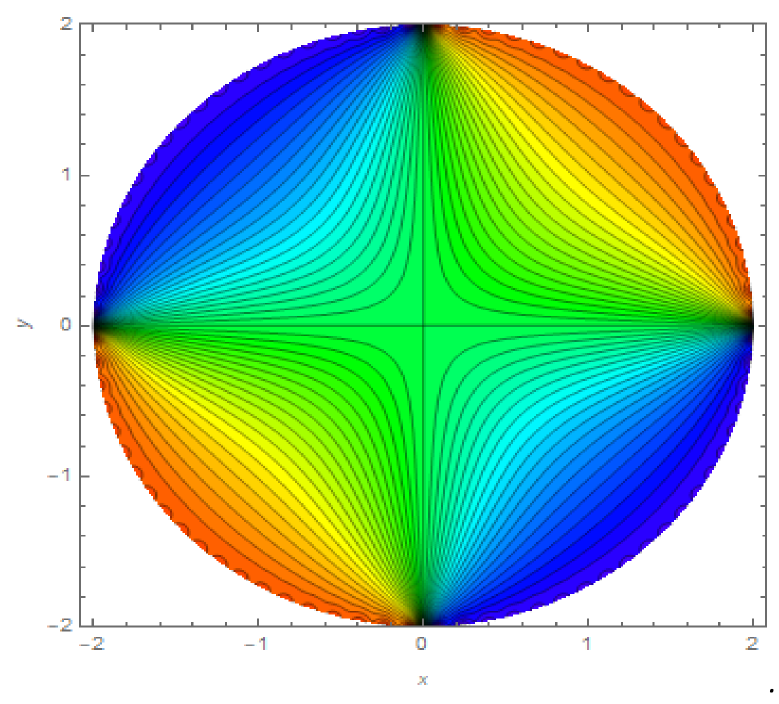
$$\Rightarrow A_0=0 \quad A_{4p,n}^{\mu_0,Y-,X-}=0 \quad A_{4p+2,n}^{\mu_0,Y-,X-}=\frac{8(\lambda_{p,n})^2\int_0^{\eta_0}d\mu\ \mu\ J_{4p+2}(\lambda_{p,n}\ \mu)}{\pi\ I_{4p+2}(\lambda_{p,n}\ \eta_0)(2p+1)\left(J_{4p+2}(\lambda_{p,n}\eta_0)\right)^2\left((\lambda_{p,n})^2\eta_0^{\ 2}-4(2p+1)^2\right)}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}A_{4p+2,n}^{\mu_0,Y-,X-}J_{4p+2}(\lambda_{p,n}\ \mu)I_{4p+2}(\lambda_{p,n}\ \nu)Sin((4p+2)\varphi) \qquad Posons \quad A_{p,n}=\int_0^{\eta_0}d\mu\ \mu\ J_{4p+2}(\lambda_{p,n}\ \mu)$$

$$\Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi)=\frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{A_{p,n}(\lambda_{p,n})^2J_{4p+2}(\lambda_{p,n}\ \mu)I_{4p+2}(\lambda_{p,n}\ \nu)Sin((4p+2)\varphi)}{(2p+1)I_{4p+2}(\lambda_{p,n}\ \eta_0)\left(J_{4p+2}(\lambda_{p,n}\eta_0)\right)^2\left((\lambda_{p,n})^2\eta_0^{\ 2}-4(2p+1)^2\right)}$$

.

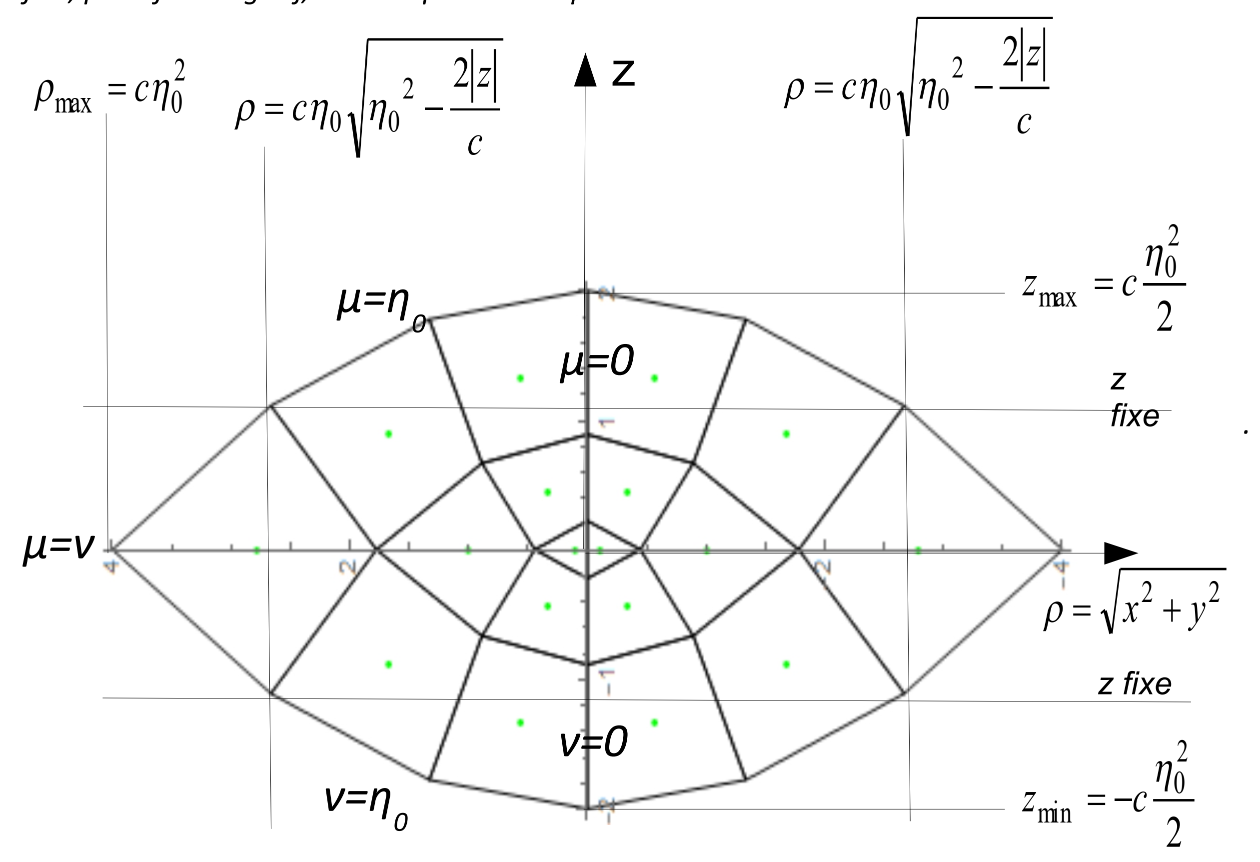
Voici le graphe de contour sur le plan équatorial du paraboloïde de révolution :



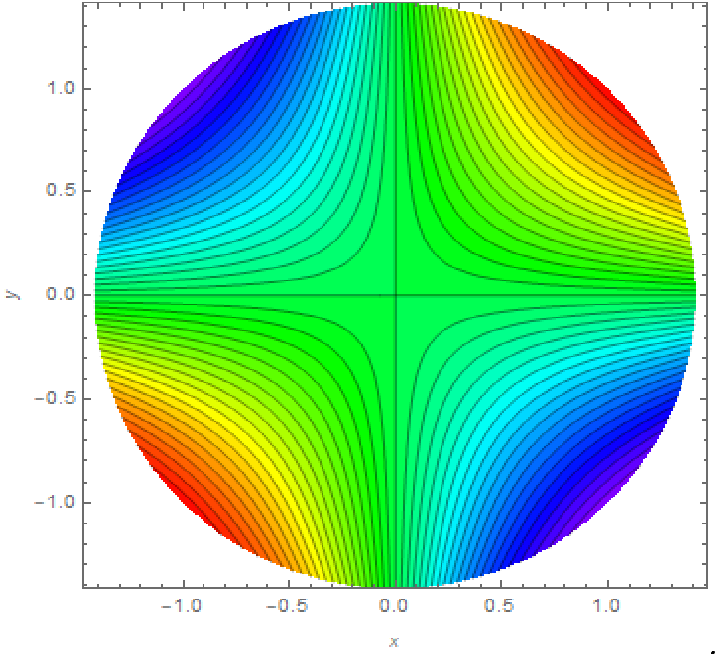
.

Les lignes de contour épouse la limite du domaine ce qui indique une condition de Dirichlet, ici inhomogène.

Le plan équatorial est définie comme le plan z=0, soit μ=v. Prenons maintenant des plans à hauteur z fixe, positif ou négatif, selon le plan de coupe suivant :

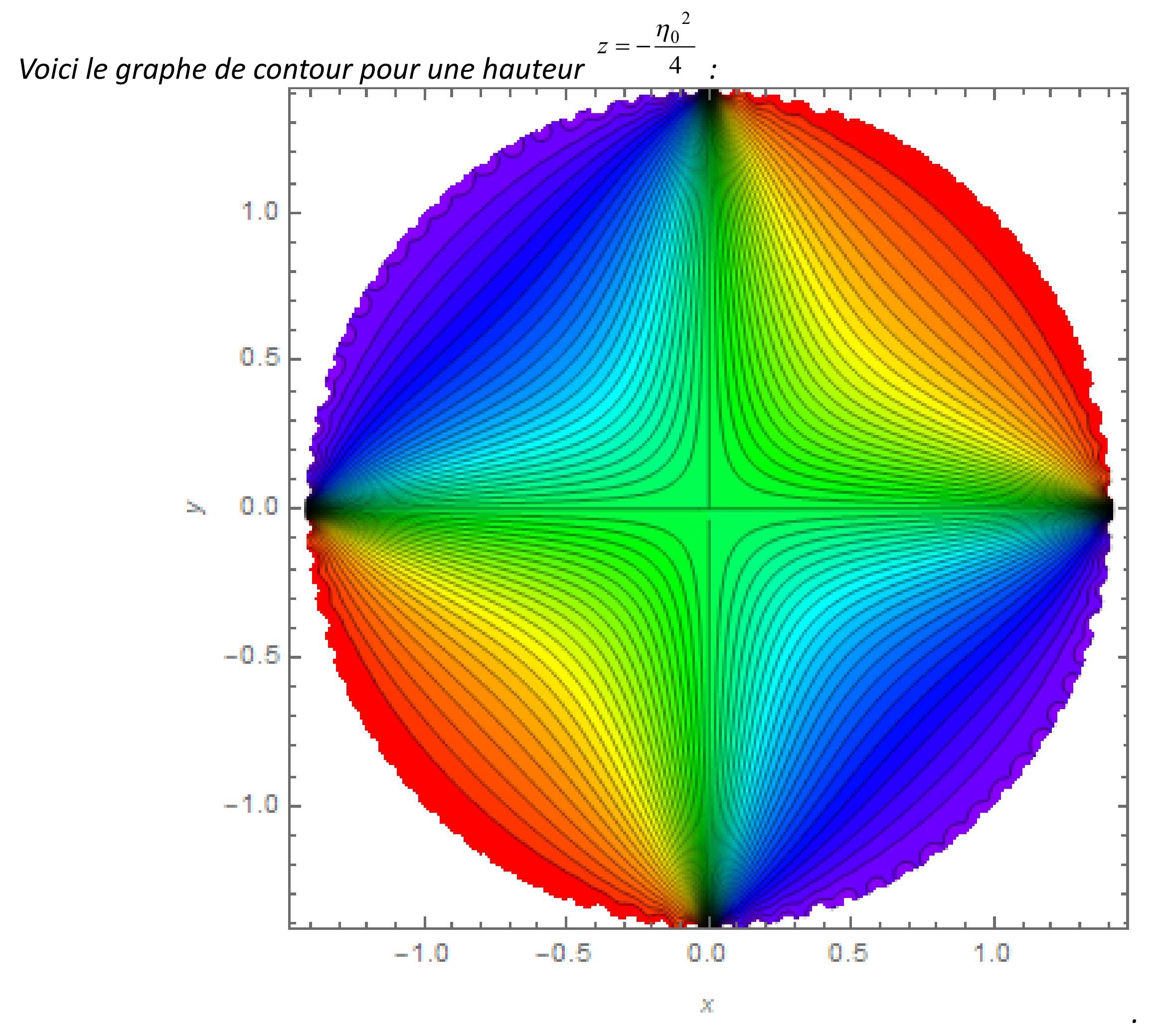


Voici le graphe de contour pour une hauteur $z = \frac{\eta_0^2}{4}$ *:*



Les lignes de contour cette fois soit « perpendiculaire » à la limite du domaine, ce qui indique une conditions homogène de Neumann. Nous sommes dans « l 'hémisphère supérieur du paraboloïde » soumis à une condition homogène de Neumann à la surface extérieure.

Voici le graphe de contour pour une hauteur $z = -\frac{\eta_0^2}{4}$ *:*



Les lignes de contour épousent la limite du domaine. Nous sommes dans « l 'hémisphère inférieur du paraboloïde de révolution » soumis à une condition inhomogène de Dirichlet à la surface extérieure.

Paraboloïde creux de révolution soumis à des conditions aux limites dépendantes ou indépendantes de l'angle azimutal

Exemple *: Soit un paraboloïde de révolution creux* $(\mu,\nu,\varphi)\in\Omega=[\mu_1,\mu_2]\times[\nu_1,\nu_2]\times[0,2\pi]$ *dans lequel les conditions dépendent maintenant de l'angle azimutal sur le paraboloïde de révolution :*

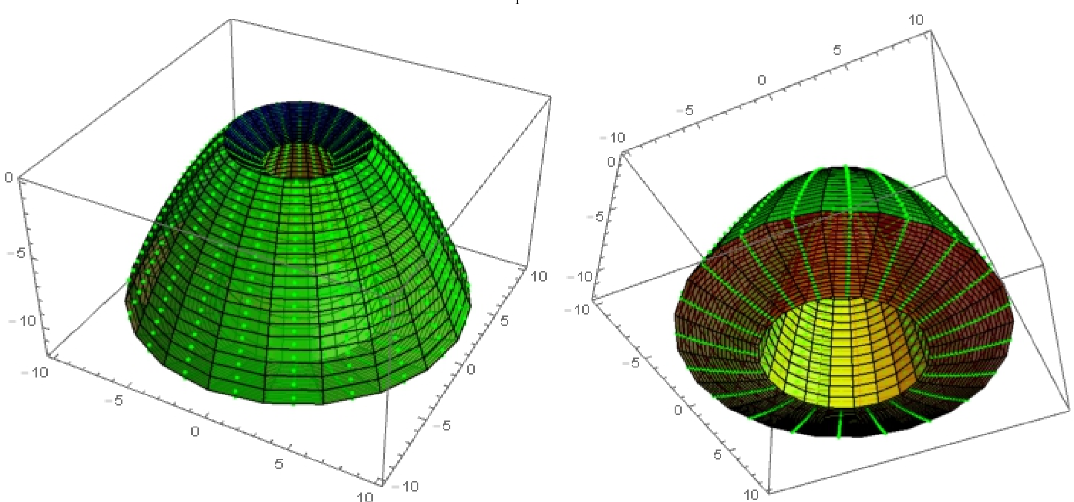
$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\frac{\partial^2T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}\right)+\frac{1}{\mu^2\nu^2}\frac{\partial^2T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

$$(\mu,\nu,\varphi)\in\Omega=[\mu_1,\mu_2]\times[\nu_1,\nu_2]\times[0,2\pi]\quad T(\mu,\nu,\varphi)\ fini$$

$$Cas\ envisagés : Dirichlet\ ou\ Neumann\Rightarrow\alpha_{\mu_1}^{\mu},{}_{\mu_2}^{\mu}\in\{0,1\}\quad\beta_{\mu_1}^{\mu},\beta_{\mu_2}^{\mu}\in\{0,1\}\quad\alpha_{\nu_1}^{\nu},\alpha_{\nu_2}^{\nu}\in\{0,1\}\quad\beta_{\nu_1}^{\nu},\beta_{\nu_2}^{\nu}\in\{0,1\}$$

$$\left.\frac{\alpha_{\mu_1}^{\mu}}{\sqrt{\mu_1^{\,2}+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}-\beta_{\mu_1}^{\mu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\mu=\mu_1}=-f_{\mu_1}(\nu,\varphi)\qquad\left.\frac{\alpha_{\mu_2}^{\mu}}{\sqrt{\mu_2^{\,2}+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta_{\mu_2}^{\mu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\mu=\mu_2}=f_{\mu_2}(\nu,\varphi)$$

$$\left.\frac{\alpha_{\nu_1}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta_{\nu_1}^{\nu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_1}=-f_{\nu_1}(\mu,\varphi)\qquad\left.\frac{\alpha_{\nu_2}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta_{\nu_2}^{\nu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_2}=f_{\nu_2}(\mu,\varphi)$$



Problème que l'on sépare comme à l'habitude en deux sous-problèmes avec d'abord les conditions homogènes dans la direction μ :

$$\left.\frac{\alpha_{\mu_1}^{\mu}}{\sqrt{\mu_1^{\,2}+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}-\beta_{\mu_1}^{\mu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\mu=\mu_1}=0\qquad\left.\frac{\alpha_{\mu_2}^{\mu}}{\sqrt{\mu_2^{\,2}+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta_{\mu_2}^{\mu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\mu=\mu_1}=0$$

$$\left.\frac{\alpha_{\nu_1}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta_{\nu_1}^{\nu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_1}=-f_{\nu_1}(\mu,\varphi)\qquad\left.\frac{\alpha_{\nu_2}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta_{\nu_2}^{\nu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_2}=f_{\nu_2}(\mu,\varphi)$$

Et celui homogène dans la direction ν :

$$\left.\frac{\alpha_{\mu_1}^{\mu}}{\sqrt{\mu_1^{\,2}+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}-\beta_{\mu_1}^{\mu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\mu=\mu_1}=-f_{\mu_1}(\nu,\varphi)\qquad\left.\frac{\alpha_{\mu_2}^{\mu}}{\sqrt{\mu_2^{\,2}+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta_{\mu_2}^{\mu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\mu=\mu_1}=f_{\mu_2}(\nu,\varphi)$$

$$\left.\frac{\alpha_{\nu_1}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta_{\nu_1}^{\nu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_1}=0\qquad\left.\frac{\alpha_{\nu_2}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta_{\nu_2}^{\nu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_2}=0$$

On simplifie les coefficients des conditions aux limites homogène à outrance, n'ayant à étudier en fin de compte que des problèmes de Neumann ou de Dirichlet où les conditions sur les paramètres des conditions aux limites sont toujours contraintes comme suit ce qui permet de simplifier la forme des conditions homogènes :

$$\alpha_{\mu_1}^{\mu},\beta_{\mu_1}^{\mu},\alpha_{\mu_2}^{\mu},\beta_{\mu_2}^{\mu},\alpha_{\nu_1}^{\nu},\beta_{\nu_1}^{\nu},\alpha_{\nu_2}^{\nu},\beta_{\nu_2}^{\nu} \in \{0,1\}$$

$$\alpha_{\mu_1}^{\mu} = 1-\beta_{\mu_1}^{\mu} \quad \alpha_{\mu_2}^{\mu} = 1-\beta_{\mu_2}^{\mu}$$

$$\alpha_{\nu_1}^{\nu} = 1-\beta_{\nu_1}^{\nu} \quad \alpha_{\nu_2}^{\nu} = 1-\beta_{\nu_2}^{\nu}$$

.

Homogène dans la direction μ :

$$\alpha_{\mu_1}^{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu} - \beta_{\mu_1}^{\mu} T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\mu=\mu_1} = 0 \qquad \alpha_{\mu_2}^{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu} + \beta_{\mu_2}^{\mu} T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\mu=\mu_1} = 0$$

$$\frac{\alpha_{\nu_1}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+{\nu_1}^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu} - \beta_{\nu_1}^{\nu} T(\mu,\nu,\varphi)\Bigg|_{\nu=\nu_1} = -f_{\nu_1}(\mu,\varphi) \qquad \frac{\alpha_{\nu_2}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+{\nu_2}^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu} + \beta_{\nu_2}^{\nu} T(\mu,\nu,\varphi)\Bigg|_{\nu=\nu_2} = f_{\nu_2}(\mu,\varphi)$$

Homogène dans la direction ν :

$$\frac{\alpha_{\mu_1}^{\mu}}{\sqrt{{\mu_1}^2+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu} - \beta_{\mu_1}^{\mu} T(\mu,\nu,\varphi)\Bigg|_{\mu=\mu_1} = -f_{\mu_1}(\nu,\varphi) \qquad \frac{\alpha_{\mu_2}^{\mu}}{\sqrt{{\mu_2}^2+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu} + \beta_{\mu_2}^{\mu} T(\mu,\nu,\varphi)\Bigg|_{\mu=\mu_1} = f_{\mu_2}(\nu,\varphi)$$

$$\alpha_{\nu_1}^{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu} - \beta_{\nu_1}^{\nu} T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\nu=\nu_1} = 0 \qquad \alpha_{\nu_2}^{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu} + \beta_{\nu_2}^{\nu} T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\nu=\nu_2} = 0$$

On réalisera cette simple manipulation à chaque fois que l'on sera en présence d'une conditions aux limites homogènes. Ce sera le cas à chaque fois que l'on sépare par la suite en deux sous -problèmes.

<u>Problème homogène dans la direction μ</u>

Deux sous-problèmes doivent être étudiés selon les conditions aux limites suivantes :

$$\alpha_{\mu_1}^{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu} - \beta_{\mu_1}^{\mu} T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\mu=\mu_1} = 0 \qquad \alpha_{\mu_2}^{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu} + \beta_{\mu_2}^{\mu} T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\mu=\mu_1} = 0$$

$$\alpha_{\nu_1}^{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu} - \beta_{\nu_1}^{\nu} T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\nu=\nu_1} = 0 \qquad \frac{\alpha_{\nu_2}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+{\nu_2}^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu} + \beta_{\nu_2}^{\nu} T(\mu,\nu,\varphi)\Bigg|_{\nu=\nu_2} = f_{\nu_2}(\mu,\varphi)$$

Et

$$\alpha_{\mu_1}^{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu} - \beta_{\mu_1}^{\mu} T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\mu=\mu_1} = 0 \qquad \alpha_{\mu_2}^{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu} + \beta_{\mu_2}^{\mu} T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\mu=\mu_1} = 0$$

$$\frac{\alpha_{\nu_1}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+{\nu_1}^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu} - \beta_{\nu_1}^{\nu} T(\mu,\nu,\varphi)\Bigg|_{\nu=\nu_1} = f_{\nu_1}(\mu,\varphi) \qquad \alpha_{\nu_2}^{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu} + \beta_{\nu_2}^{\nu} T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\nu=\nu_2} = 0$$

Les fonctions propres et normes pour les solutions homogènes en μ, respectant les conditions aux limites, deviennent :

$$M_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)=\frac{J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}-\frac{Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}$$

$$\frac{M_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}{}'(\mu)}{\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}}=\frac{J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}-\frac{Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}$$

$$\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\quad tq\quad \frac{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}{\alpha_{\mu_2}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_2\right)+\beta_{\mu_2}^{\mu}J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_2\right)}=\frac{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}{\alpha_{\mu_2}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_2\right)+\beta_{\mu_2}^{\mu}Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_2\right)}$$

$$M_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_1)=\frac{J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu_1\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}-\frac{Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu_1\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}$$

$$M_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_2)=\frac{J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu_2\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}-\frac{Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu_2\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}$$

$$\frac{M_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}{}'(\mu_1)}{\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}}=D_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_1)=\frac{J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu_1\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}-\frac{Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu_1\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}$$

$$\frac{M_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}{}'(\mu_2)}{\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}}=D_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_2)=\frac{J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu_2\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}-\frac{Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu_2\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}$$

$$\left\|M_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\right\|^2=\frac{\left[\mu^2\left(\left(\frac{M_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}{}'(\mu)}{\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}}\right)^2+\left(M_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\right)^2\left(1-\frac{m^2}{\mu^2\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\right)^2}\right)\right)\right]_{\mu_1}^{\mu_2}}{2}$$

$$\left\|M_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\right\|^2=\frac{\left[\mu^2\left(\left(D_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\right)^2+\left(M_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\right)^2\left(1-\frac{m^2}{\mu^2\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\right)^2}\right)\right)\right]_{\mu_1}^{\mu_2}}{2}$$

$$=\frac{\mu_2{}^2\left(\left(D_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_2)\right)^2+\left(M_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_2)\right)^2\left(1-\frac{m^2}{\mu_2{}^2\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\right)^2}\right)\right)-\mu_1{}^2\left(\left(D_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_1)\right)^2+\left(M_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_1)\right)^2\left(1-\frac{m^2}{\mu_1{}^2\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\right)^2}\right)\right)}{2}$$

Remarque : m est un indice entier qui va dépendre de la décomposition des conditions aux limites inhomogènes selon les quatre symétries azimutales : Y+X+, Y+X-, Y-X+ et Y-X- (voir plus loin)

Les fonctions dépendantes de v, en respectant les conditions aux limites homogènes prennent la forme :

$$N_{m,n}^{0,\nu_2}(\nu) = A\, I_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\, \nu\right) + B\, K_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\, \nu\right)$$

$$\alpha_{\nu_1}^{\nu} \frac{\partial N_{m,n}^{0,\nu_2}(\nu)}{\partial \nu} - \beta_{\nu_1}^{\nu}\, N_{m,n}^{0,\nu_2}(\nu)\bigg|_{\nu=\nu_1} = 0$$

$$\Rightarrow N_{m,n}^{0,\nu_2}(\nu) = \frac{I_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\, \nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu} \lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2} I_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_1\right) - \beta_{\nu_1}^{\nu}\, I_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_1\right)} - \frac{K_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\, \nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu} \lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2} K_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_1\right) - \beta_{\nu_1}^{\nu}\, K_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_1\right)}$$

$$N_{m,n}^{\nu_1,0}(\nu) = A\, I_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\, \nu\right) + B\, K_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\, \nu\right)$$

$$\alpha_{\nu_2}^{\nu} \frac{\partial N_{m,n}^{\nu_1,0}(\nu)}{\partial \nu} + \beta_{\nu_2}^{\nu}\, N_{m,n}^{\nu_1,0}(\nu)\bigg|_{\nu=\nu_2} = 0$$

$$\Rightarrow N_{m,n}^{\nu_1,0}(\nu) = \frac{I_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\, \nu\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu} \lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2} I_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_2\right) + \beta_{\nu_2}^{\nu} I_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_2\right)} - \frac{K_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\, \nu\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu} \lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2} K_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_2\right) + \beta_{\nu_2}^{\nu} K_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_2\right)}$$

Toutes les fonctions limites sont décomposées par symétries azimutales :

$$f_{\nu_1}(\mu,\varphi)=f_{\nu_1,Y+,X+}(\mu,\varphi)+f_{\nu_2,Y+,X-}(\mu,\theta)+f_{\nu_1,Y-,X+}(\mu,\theta)+f_{\nu_1,Y-,X-}(\mu,\theta),$$

$$\textit{sachant que } f_{\nu_1}(\mu,\varphi)=f_{\nu_1}(\mu,2\pi+\varphi)$$

$$f_{\nu_1,Y+,X+}(\mu,\varphi)=\frac{f_{\nu_1}(\mu,\varphi)+f_{\nu_1}(\mu,\pi-\varphi)+f_{\nu_1}(\mu,-\varphi)+f_{\nu_1}(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\nu_1,Y+,X-}(\mu,\varphi)=\frac{f_{\nu_1}(\mu,\varphi)+f_{\nu_1}(\mu,\pi-\varphi)-f_{\nu_1}(\mu,-\varphi)-f_{\nu_1}(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\nu_1,Y-,X+}(\mu,\varphi)=\frac{f_{\nu_1}(\mu,\varphi)-f_{\nu_1}(\mu,\pi-\varphi)+f_{\nu_1}(\mu,-\varphi)-f_{\nu_1}(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\nu_1,Y-,X-}(\mu,\varphi)=\frac{f_{\nu_1}(\mu,\varphi)-f_{\nu_1}(\mu,\pi-\varphi)-f_{\nu_1}(\mu,-\varphi)+f_{\nu_1}(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\nu_2}(\mu,\varphi)=f_{\nu_2,Y+,X+}(\mu,\varphi)+f_{\nu_2,Y+,X-}(\mu,\theta)+f_{\nu_2,Y-,X+}(\mu,\theta)+f_{\nu_2,Y-,X-}(\mu,\theta),$$

$$\textit{sachant que } f_{\nu_2}(\mu,\varphi)=f_{\nu_2}(\mu,2\pi+\varphi)$$

$$f_{\nu_2,Y+,X+}(\mu,\varphi)=\frac{f_{\nu_2}(\mu,\varphi)+f_{\nu_2}(\mu,\pi-\varphi)+f_{\nu_2}(\mu,-\varphi)+f_{\nu_2}(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\nu_2,Y+,X-}(\mu,\varphi)=\frac{f_{\nu_2}(\mu,\varphi)+f_{\nu_2}(\mu,\pi-\varphi)-f_{\nu_2}(\mu,-\varphi)-f_{\nu_2}(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\nu_2,Y-,X+}(\mu,\varphi)=\frac{f_{\nu_2}(\mu,\varphi)-f_{\nu_2}(\mu,\pi-\varphi)+f_{\nu_2}(\mu,-\varphi)-f_{\nu_2}(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\nu_2,Y-,X-}(\mu,\varphi)=\frac{f_{\nu_2}(\mu,\varphi)-f_{\nu_2}(\mu,\pi-\varphi)-f_{\nu_2}(\mu,-\varphi)+f_{\nu_2}(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\mu_1}(\nu,\varphi)=f_{\mu_1,Y+,X+}(\nu,\varphi)+f_{\mu_1,Y+,X-}(\nu,\theta)+f_{\mu_1,Y-,X+}(\nu,\theta)+f_{\mu_1,Y-,X-}(\nu,\theta),$$

$$\textit{sachant que } f_{\mu_1}(\nu,\varphi)=f_{\mu_1}(\nu,2\pi+\varphi)$$

$$f_{\mu_1,Y+,X+}(\nu,\varphi)=\frac{f_{\mu_1}(\nu,\varphi)+f_{\mu_1}(\nu,\pi-\varphi)+f_{\mu_1}(\nu,-\varphi)+f_{\mu_1}(\nu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\mu_1,Y+,X-}(\nu,\varphi)=\frac{f_{\mu_1}(\nu,\varphi)+f_{\mu_1}(\nu,\pi-\varphi)-f_{\mu_1}(\nu,-\varphi)-f_{\mu_1}(\nu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\mu_1,Y-,X+}(\nu,\varphi)=\frac{f_{\mu_1}(\nu,\varphi)-f_{\mu_1}(\nu,\pi-\varphi)+f_{\mu_1}(\nu,-\varphi)-f_{\mu_1}(\nu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\mu_1,Y-,X-}(\nu,\varphi)=\frac{f_{\mu_1}(\nu,\varphi)-f_{\mu_1}(\nu,\pi-\varphi)-f_{\mu_1}(\nu,-\varphi)+f_{\mu_1}(\nu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\mu_2}(\nu,\varphi)=f_{\mu_2,Y+,X+}(\nu,\varphi)+f_{\mu_2,Y+,X-}(\nu,\theta)+f_{\mu_2,Y-,X+}(\nu,\theta)+f_{\mu_2,Y-,X-}(\nu,\theta),$$

$$\textit{sachant que } f_{\mu_2}(\nu,\varphi)=f_{\mu_2}(\nu,2\pi+\varphi)$$

$$f_{\mu_2,Y+,X+}(\nu,\varphi)=\frac{f_{\mu_2}(\nu,\varphi)+f_{\mu_2}(\nu,\pi-\varphi)+f_{\mu_2}(\nu,-\varphi)+f_{\mu_2}(\nu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\mu_2,Y+,X-}(\nu,\varphi)=\frac{f_{\mu_2}(\nu,\varphi)+f_{\mu_2}(\nu,\pi-\varphi)-f_{\mu_2}(\nu,-\varphi)-f_{\mu_2}(\nu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\mu_2,Y-,X+}(\nu,\varphi)=\frac{f_{\mu_2}(\nu,\varphi)-f_{\mu_2}(\nu,\pi-\varphi)+f_{\mu_2}(\nu,-\varphi)-f_{\mu_2}(\nu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\mu_2,Y-,X-}(\nu,\varphi)=\frac{f_{\mu_2}(\nu,\varphi)-f_{\mu_2}(\nu,\pi-\varphi)-f_{\mu_2}(\nu,-\varphi)+f_{\mu_2}(\nu,\varphi-\pi)}{4}.$$

Injectant les formes des fonctions en μ et ν, on arrive aux intégrales et aux coefficients du développement en série comme ceci , en prenant comme exemple la composante de symétrie Y+,X+ :

$$N_{m,n}^{0,\nu_2}(\nu)=\frac{I_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}I_m{}'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}I_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_1\right)}-\frac{K_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}K_m{}'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}K_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_1\right)}$$

$$N_{m,n}^{0,\nu_2}{}'(\nu)=\frac{I_m{}'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}I_m{}'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}I_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_1\right)}-\frac{K_m{}'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}K_m{}'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}K_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_1\right)}$$

$$Terme\quad\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}A_{\nu_2,2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y+,X+}M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)N_{2m,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu)Cos(2m\varphi)$$

$$\left.\frac{\alpha_{\nu_2}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+\nu_2{}^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta_{\nu_2}^{\nu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_2}=f_{\nu_2,Y+,X+}(\mu,\varphi)$$

$$\Rightarrow\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}A_{\nu_2,2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y+,X+}M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\left(\alpha_{\nu_2}^{\nu}N_{2m,n_\mu}^{0,\nu_2}{}'(\nu_2)+\sqrt{\mu^2+\nu_2{}^2}\,\beta_{\nu_2}^{\nu}N_{2m,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu_2)\right)Cos(2m\varphi)=\sqrt{\mu^2+\nu_2{}^2}\,f_{\nu_2,Y+,X+}(\mu,\varphi)$$

$$\Rightarrow A_{\nu_2,2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y+,X+}=\frac{2\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\frac{M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_2{}^2}\int_0^{\pi}d\varphi\,f_{\nu_2,Y+,X+}(\mu,\varphi)Cos(2m\varphi)}{\left(\alpha_{\nu_2}^{\nu}N_{2m,n_\mu}^{0,\nu_2}{}'(\nu_2)+\sqrt{\mu^2+\nu_2{}^2}\,\beta_{\nu_2}^{\nu}N_{2m,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu_2)\right)}}{\pi\left(1+\partial_{2m,0}\right)\left\|M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\right\|^2}$$

$$N_{m,n}^{\nu_1,0}(\nu)=\frac{I_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}I_m{}'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_2\right)+\beta_{\nu_2}^{\nu}I_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_2\right)}-\frac{K_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}K_m{}'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_2\right)+\beta_{\nu_2}^{\nu}K_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_2\right)}$$

$$N_{m,n}^{\nu_1,0}{}'(\nu)=\frac{I_m{}'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}I_m{}'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_2\right)+\beta_{\nu_2}^{\nu}I_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_2\right)}-\frac{K_m{}'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}K_m{}'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_2\right)+\beta_{\nu_2}^{\nu}K_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_2\right)}$$

$$Terme\quad\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}A_{\nu_1,2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y+,X+}M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)N_{2m,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu)Cos(2m\varphi)$$

$$\left.\frac{\alpha_{\nu_1}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+\nu_1{}^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta_{\nu_1}^{\nu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_1}=-f_{\nu_1,Y+,X+}(\mu,\varphi)$$

$$\Rightarrow\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}A_{\nu_1,2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y+,X+}M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\left(\alpha_{\nu_1}^{\nu}N_{2m,n_\mu}^{\nu_1,0}{}'(\nu_1)-\sqrt{\mu^2+\nu_1{}^2}\,\beta_{\nu_1}^{\nu}N_{2m,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu_2)\right)Cos(2m\varphi)=-\sqrt{\mu^2+\nu_1{}^2}\,f_{\nu_1,Y+,X+}(\mu,\varphi)$$

$$A_{\nu_1,2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y+,X+}=\frac{2\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\frac{M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_1{}^2}\int_0^{\pi}d\varphi\,f_{\nu_1,Y+,X+}(\mu,\varphi)Cos(2m\varphi)}{\left(\sqrt{\mu^2+\nu_1{}^2}\,\beta_{\nu_1}^{\nu}N_{2m,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu_1)-\alpha_{\nu_1}^{\nu}N_{2m,n_\mu}^{\nu_1,0}{}'(\nu_1)\right)}}{\pi\left(1+\partial_{2m,0}\right)\left\|M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\right\|^2}$$

Les huit intégrales par symétrie azimutale sont donc :

$$A_{\nu_1,2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y+,X+}=\frac{2\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\frac{M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}\int_0^\pi d\varphi\; f_{\nu_1,Y+,X+}(\mu,\varphi)Cos(2m\varphi)}{\left(\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}\,\beta_{\nu_1}^{\nu}N_{2m,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu_1)-\alpha_{\nu_1}^{\nu}N_{2m,n_\mu}^{\nu_1,0}{}'(\nu_1)\right)}}{\pi\left(1+\partial_{2m,0}\right)\left\|M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\right\|^2}$$

$$A_{\nu_1,2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y+,X-}=\frac{2\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\frac{M_{2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}\int_0^\pi d\varphi\; f_{\nu_1,Y+,X-}(\mu,\varphi)Sin\left((2m+1)\varphi\right)}{\left(\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}\,\beta_{\nu_1}^{\nu}N_{2m+1,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu_1)-\alpha_{\nu_1}^{\nu}N_{2m+1,n_\mu}^{\nu_1,0}{}'(\nu_1)\right)}}{\pi\left\|M_{2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\right\|^2}$$

$$A_{\nu_1,2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y-,X+}=\frac{2\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\frac{M_{2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}\int_0^\pi d\varphi\; f_{\nu_1,Y-,X+}(\mu,\varphi)Cos\left((2m+1)\varphi\right)}{\left(\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}\,\beta_{\nu_1}^{\nu}N_{2m+1,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu_1)-\alpha_{\nu_1}^{\nu}N_{2m+1,n_\mu}^{\nu_1,0}{}'(\nu_1)\right)}}{\pi\left\|M_{2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\right\|^2}$$

$$A_{\nu_1,2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y-,X-}=\frac{2\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\frac{M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}\int_0^\pi d\varphi\; f_{\nu_1,Y-,X-}(\mu,\varphi)Sin(2m\varphi)}{\left(\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}\,\beta_{\nu_1}^{\nu}N_{2m,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu_1)-\alpha_{\nu_1}^{\nu}N_{2m,n_\mu}^{\nu_1,0}{}'(\nu_1)\right)}}{\pi\left(1+\partial_{2m,0}\right)\left\|M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\right\|^2}$$

$$A_{\nu_2,2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y+,X+}=\frac{2\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\frac{M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}\int_0^\pi d\varphi\; f_{\nu_2,Y+,X+}(\mu,\varphi)Cos(2m\varphi)}{\left(\alpha_{\nu_2}^{\nu}N_{2m,n_\mu}^{0,\nu_2}{}'(\nu_2)+\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}\,\beta_{\nu_2}^{\nu}N_{2m,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu_2)\right)}}{\pi\left(1+\partial_{2m,0}\right)\left\|M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\right\|^2}$$

$$A_{\nu_2,2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y+,X-}=\frac{2\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\frac{M_{2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}\int_0^\pi d\varphi\; f_{\nu_2,Y+,X-}(\mu,\varphi)Sin\left((2m+1)\varphi\right)}{\left(\alpha_{\nu_2}^{\nu}N_{2m+1,n_\mu}^{0,\nu_2}{}'(\nu_2)+\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}\,\beta_{\nu_2}^{\nu}N_{2m+1,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu_2)\right)}}{\pi\left\|M_{2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\right\|^2}$$

$$A_{\nu_2,2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y-,X+}=\frac{2\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\frac{M_{2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}\int_0^\pi d\varphi\; f_{\nu_2,Y-,X+}(\mu,\varphi)Cos\left((2m+1)\varphi\right)}{\left(\alpha_{\nu_2}^{\nu}N_{2m+1,n_\mu}^{0,\nu_2}{}'(\nu_2)+\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}\,\beta_{\nu_2}^{\nu}N_{2m+1,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu_2)\right)}}{\pi\left\|M_{2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\right\|^2}$$

$$A_{\nu_2,2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y-,X-}=\frac{2\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\frac{M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}\int_0^\pi d\varphi\; f_{\nu_2,Y-,X-}(\mu,\varphi)Sin(2m\varphi)}{\left(\alpha_{\nu_2}^{\nu}N_{2m,n_\mu}^{0,\nu_2}{}'(\nu_2)+\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}\,\beta_{\nu_2}^{\nu}N_{2m,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu_2)\right)}}{\pi\left(1+\partial_{2m,0}\right)\left\|M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\right\|^2}$$

La solution complète du problème homogène dans la direction µ devient :

$$T_{\mu_1,\mu_2}(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}A_{\nu_1,2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y+,X+}M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)N_{2m,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu)Cos(2m\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}A_{\nu_1,2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y+,X-}M_{2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)N_{2m+1,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu)Sin((2m+1)\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}A_{\nu_1,2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y-,X+}M_{2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)N_{2m+1,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu)Cos((2m+1)\varphi)+$$

$$+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}A_{\nu_1,2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y-,X-}M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)N_{2m,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu)Sin(2m\varphi)+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}A_{\nu_2,2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y+,X+}M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)N_{2m,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu)Cos(2m\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}A_{\nu_2,2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y+,X-}M_{2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)N_{2m+1,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu)Sin((2m+1)\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}A_{\nu_2,2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y-,X+}M_{2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)N_{2m+1,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu)Cos((2m+1)\varphi)+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}A_{\nu_2,2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y-,X-}M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)N_{2m,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu)Sin(2m\varphi)$$

Problème homogène dans la direction ν

Par substitution entre les coordonnées μ et ν, il est facile de donner la solution de ce problème. Les fonctions propres et normes pour les solutions homogènes en ν, respectant les conditions aux limites, deviennent :

$$N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)=\frac{J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\quad tq\quad \frac{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)+\beta_{\nu_2}^{\nu}J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}=\frac{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)+\beta_{\nu_2}^{\nu}Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}$$

$$N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)=\frac{J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)=\frac{J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$\frac{N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}{}'(\nu_1)}{\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}}=D_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)=\frac{J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$\frac{N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}{}'(\nu_2)}{\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}}=D_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)=\frac{J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$\left\|N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2=\frac{\nu_2^{\,2}\left(\left(D_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)\right)^2+\left(N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)\right)^2\left(1-\frac{m^2}{\nu_2^{\,2}\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\right)^2}\right)\right)-\nu_1^{\,2}\left(\left(D_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)^2+\left(N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)^2\left(1-\frac{m^2}{\nu_1^{\,2}\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\right)^2}\right)\right)}{2}$$

Les fonctions dépendantes de μ sont de la forme :

$$M_{m,n}^{0,\mu_2}(\mu)=\frac{I_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}I_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}I_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_1\right)}-\frac{K_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}K_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}K_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_1\right)}$$

$$M_{m,n}^{0,\mu_2}{}'(\mu)=\frac{I_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}I_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}I_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_1\right)}-\frac{K_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}K_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}K_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_1\right)}$$

$$M_{m,n}^{\mu_1,0}(\mu)=\frac{I_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{\alpha_{\mu_2}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}I_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_2\right)+\beta_{\mu_2}^{\mu}I_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_2\right)}-\frac{K_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{\alpha_{\mu_2}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}K_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_2\right)+\beta_{\mu_2}^{\mu}K_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_2\right)}$$

$$M_{m,n}^{\mu_1,0}{}'(\mu)=\frac{I_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{\alpha_{\mu_2}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}I_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_2\right)+\beta_{\mu_2}^{\mu}I_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_2\right)}-\frac{K_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{\alpha_{\mu_2}^{\mu}\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}K_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_2\right)+\beta_{\mu_2}^{\mu}K_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_2\right)}$$

Les 4 intégrales dérivant des conditions inhomogènes en μ_1 :

$$A_{\mu_1,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X+} = \frac{2\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\,\nu \frac{N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\sqrt{\nu^2+\mu_1^2}\int_0^\pi d\varphi\, f_{\mu_1,Y+,X+}(\nu,\varphi)Cos(2m\varphi)}{\left(\sqrt{\nu^2+\mu_1^2}\,\beta_{\mu_1}^{\mu} M_{2m,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu_1) - \alpha_{\mu_1}^{\mu} M_{2m,n_\nu}^{\mu_1,0}{}'(\mu_1)\right)}}{\pi\left(1+\partial_{2m,0}\right)\left\|N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2}$$

$$A_{\mu_1,2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X-} = \frac{2\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\,\nu \frac{N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\sqrt{\nu^2+\mu_1^2}\int_0^\pi d\varphi\, f_{\mu_1,Y+,X-}(\nu,\varphi)Sin\left((2m+1)\varphi\right)}{\left(\sqrt{\nu^2+\mu_1^2}\,\beta_{\mu_1}^{\mu} M_{2m+1,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu_1) - \alpha_{\mu_1}^{\mu} M_{2m+1,n_\nu}^{\mu_1,0}{}'(\mu_1)\right)}}{\pi\left\|N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2}$$

$$A_{\mu_1,2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y-,X+} = \frac{2\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\,\nu \frac{N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\sqrt{\nu^2+\mu_1^2}\int_0^\pi d\varphi\, f_{\mu_1,Y-,X+}(\nu,\varphi)Cos\left((2m+1)\varphi\right)}{\left(\sqrt{\nu^2+\mu_1^2}\,\beta_{\mu_1}^{\mu} M_{2m+1,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu_1) - \alpha_{\mu_1}^{\mu} M_{2m+1,n_\nu}^{\mu_1,0}{}'(\mu_1)\right)}}{\pi\left\|N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2}$$

$$A_{\mu_1,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y-,X-} = \frac{2\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\,\nu \frac{N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\sqrt{\nu^2+\mu_1^2}\int_0^\pi d\varphi\, f_{\mu_1,Y-,X-}(\nu,\varphi)Sin(2m\varphi)}{\left(\sqrt{\nu^2+\mu_1^2}\,\beta_{\mu_1}^{\mu} M_{2m,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu_1) - \alpha_{\mu_1}^{\mu} M_{2m,n_\nu}^{\mu_1,0}{}'(\mu_1)\right)}}{\pi\left\|N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2}$$

Les 4 intégrales dérivant des conditions inhomogènes en μ_2 :

$$A_{\mu_2,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X+}=\frac{2\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\nu\frac{N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\sqrt{\nu^2+\mu_2^2}\int_0^{\pi}d\varphi\, f_{\mu_2,Y+,X+}(\nu,\varphi)Cos(2m\varphi)}{\left(\sqrt{\nu^2+\mu_2^2}\beta_{\mu_2}^{\mu}M_{2m,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu_2)+\alpha_{\mu_2}^{\mu}M_{2m,n_\nu}^{0,\mu_2}{}'(\mu_2)\right)}}{\pi\left(1+\partial_{2m,0}\right)\left\|N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2}$$

$$A_{\mu_2,2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X-}=\frac{2\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\nu\frac{N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\sqrt{\nu^2+\mu_2^2}\int_0^{\pi}d\varphi\, f_{\mu_2,Y+,X-}(\nu,\varphi)Sin((2m+1)\varphi)}{\left(\sqrt{\nu^2+\mu_2^2}\beta_{\mu_2}^{\mu}M_{2m+1,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu_2)+\alpha_{\mu_2}^{\mu}M_{2m+1,n_\nu}^{0,\mu_2}{}'(\mu_2)\right)}}{\pi\left\|N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2}$$

$$A_{\mu_2,2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y-,X+}=\frac{2\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\nu\frac{N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\sqrt{\nu^2+\mu_2^2}\int_0^{\pi}d\varphi\, f_{\mu_2,Y-,X+}(\nu,\varphi)Cos((2m+1)\varphi)}{\left(\sqrt{\nu^2+\mu_2^2}\beta_{\mu_2}^{\mu}M_{2m+1,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu_2)+\alpha_{\mu_2}^{\mu}M_{2m+1,n_\nu}^{0,\mu_2}{}'(\mu_2)\right)}}{\pi\left\|N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2}$$

$$A_{\mu_2,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y-,X-}=\frac{2\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\nu\frac{N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\sqrt{\nu^2+\mu_2^2}\int_0^{\pi}d\varphi\, f_{\mu_2,Y-,X-}(\nu,\varphi)Sin(2m\varphi)}{\left(\sqrt{\nu^2+\mu_2^2}\beta_{\mu_2}^{\mu}M_{2m,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu_2)+\alpha_{\mu_2}^{\mu}M_{2m,n_\nu}^{0,\mu_2}{}'(\mu_2)\right)}}{\pi\left\|N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2}$$

ce qui donne la solution pour le problème homogènes en ν :

$$\begin{aligned}
T_{\nu_1,\nu_2}(\mu,\nu,\varphi)=&\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty}A_{\mu_1,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X+}M_{2m,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu)N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)Cos(2m\varphi)+\\
&+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty}A_{\mu_1,2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X-}M_{2m+1,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu)N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)Sin((2m+1)\varphi)+\\
&+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty}A_{\mu_1,2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y-,X+}M_{2m+1,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu)N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)Cos((2m+1)\varphi)+\\
&+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty}A_{\mu_1,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y-,X-}M_{2m,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu)N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)Sin(2m\varphi)+\\
&+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty}A_{\mu_2,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X+}M_{2m,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu)N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)Cos(2m\varphi)+\\
&+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty}A_{\mu_2,2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X-}M_{2m+1,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu)N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)Sin((2m+1)\varphi)+\\
&+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty}A_{\mu_2,2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y-,X+}M_{2m+1,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu)N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)Cos((2m+1)\varphi)+\\
&+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty}A_{\mu_2,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y-,X-}M_{2m,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu)N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)Sin(2m\varphi)
\end{aligned}$$

Prise en compte de la valeur propre nulle

Dans ce problème il ne faut pas omettre les solutions de valeurs propres nulles. Lorsque la fonction propre azimutale est de valeur propre nulle, soit une constante, alors les solutions en μ et ν sont des fonctions de Bessel et Bessel modifiées d'ordre zéro. Elles ne changent pas de nature fondamentalement et elles sont aussi prises en considération dans la sommation de la série. Le seul cas où la solution de valeur propre nulle change de nature est lorsque

$$m=0 \quad et \quad \lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}=0 \quad problème\ homogène\ en\ \mu$$

$$m=0 \quad et \quad \lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}=0 \quad problème\ homogène\ en\ \nu$$

Et dans ce cas nous avons vu que les fonctions solutions sont de la forme A+BLog(μ) et C+DLog(ν). La forme qui s'impose en respectant les conditions aux limites homogène en μ (resp. ν) est constante en (μ resp.ν). Dans ce cas les conditions aux limites homogènes en μ (resp. ν) sont de Neumann de part et d'autres. Il vient :

$$Problème\ homogène\ en\ \mu$$

$$\alpha_{\mu_1}^{\mu}=\alpha_{\mu_2}^{\mu}=1 \quad et \quad \beta_{\mu_1}^{\mu}=\beta_{\mu_2}^{\mu}=0$$

$$N(\nu)=A+B\nu \rightarrow \alpha_{\nu_1}^{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu}-\beta_{\nu_1}^{\nu}\,T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\nu=\nu_1}=0 \Rightarrow N(\nu)\propto \alpha_{\nu_1}^{\nu}+\nu_1\beta_{\nu_1}^{\nu}Log\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)$$

$$\frac{\alpha_{\nu_2}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu}+\beta_{\nu_2}^{\nu}\,T(\mu,\nu,\varphi)\Bigg|_{\nu=\nu_2}=f_{\nu_2}(\mu,\varphi)$$

$$\Rightarrow A_0^{\nu_2}=\frac{\nu_2\displaystyle\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\frac{\mu\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}}{\left(\alpha_{\nu_2}^{\nu}\beta_{\nu_1}^{\nu}\nu_1+\beta_{\nu_2}^{\nu}\nu_2\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}\left(\alpha_{\nu_1}^{\nu}+\nu_1\beta_{\nu_1}^{\nu}Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)\right)\right)}\displaystyle\int_0^{2\pi}d\varphi\ f_{\nu_2}(\mu,\varphi)}{\pi\left(\mu_2^{\,2}-\mu_1^{\,2}\right)}$$

$$N(\nu)=A+B\nu \rightarrow \alpha_{\nu_2}^{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu}+\beta_{\nu_2}^{\nu}\,T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\nu=\nu_2}=0 \Rightarrow N(\nu)\propto \alpha_{\nu_2}^{\nu}+\nu_2\beta_{\nu_2}^{\nu}Log\left(\frac{\nu_2}{\nu}\right)$$

$$\frac{\alpha_{\nu_1}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu}-\beta_{\nu_1}^{\nu}\,T(\mu,\nu,\varphi)\Bigg|_{\nu=\nu_2}=-f_{\nu_1}(\mu,\varphi)$$

$$\Rightarrow A_0^{\nu_1}=\frac{\nu_1\displaystyle\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\frac{\mu\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}}{\left(\alpha_{\nu_1}^{\nu}\beta_{\nu_2}^{\nu}\nu_2+\nu_1\beta_{\nu_1}^{\nu}\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}\left(\alpha_{\nu_2}^{\nu}+\nu_2\beta_{\nu_2}^{\nu}Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)\right)\right)}\displaystyle\int_0^{2\pi}d\varphi\ f_{\nu 1}(\mu,\varphi)}{\pi\left(\mu_2^{\,2}-\mu_1^{\,2}\right)}$$

$$Si \quad \beta_{\nu_1}^{\nu}=\beta_{\nu_2}^{\nu}=0 \quad A_0^{\nu_1}\ et\ A_0^{\nu_2} \quad sont\ des\ constantes\ quelconques\ puisque$$

$$\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu}\Bigg|_{\mu=\mu_1}=\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu}\Bigg|_{\mu=\mu_2}=0 \quad et \quad \frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu}\Bigg|_{\nu=\nu_1}=\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu}\Bigg|_{\nu=\nu_2}=0$$

Soit la solution complète pour le problème homogène en μ :

$$A_0^{\nu_1} = \frac{\nu_1 \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \frac{\mu\sqrt{\mu^2+\nu_1^2}}{\left(\alpha_{\nu_1}^{\nu}\beta_{\nu_2}^{\nu}\nu_2+\nu_1\beta_{\nu_1}^{\nu}\sqrt{\mu^2+\nu_1^2}\left(\alpha_{\nu_2}^{\nu}+\nu_2\beta_{\nu_2}^{\nu}Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)\right)\right)}\int_0^{2\pi} d\varphi\, f_{\nu 1}(\mu,\varphi)}{\pi\left(\mu_2^{\,2}-\mu_1^{\,2}\right)}$$

$$A_0^{\nu_2} = \frac{\nu_2 \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \frac{\mu\sqrt{\mu^2+\nu_2^2}}{\left(\alpha_{\nu_2}^{\nu}\beta_{\nu_1}^{\nu}\nu_1+\beta_{\nu_2}^{\nu}\nu_2\sqrt{\mu^2+\nu_2^2}\left(\alpha_{\nu_1}^{\nu}+\nu_1\beta_{\nu_1}^{\nu}Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)\right)\right)}\int_0^{2\pi} d\varphi\, f_{\nu_2}(\mu,\varphi)}{\pi\left(\mu_2^{\,2}-\mu_1^{\,2}\right)}$$

$$T_{\mu_1,\mu_2}(\mu,\nu,\varphi) = A_0^{\nu_1}\left(\alpha_{\nu_2}^{\nu}+\nu_2\beta_{\nu 2}^{\nu}Log\left(\frac{\nu_2}{\nu}\right)\right)+A_0^{\nu_2}\left(\alpha_{\nu_1}^{\nu}+\nu_1\beta_{\nu_1}^{\nu}Log\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)\right)+$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty} A_{\nu_1,2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y+,X+}M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)N_{2m,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu)Cos(2m\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty} A_{\nu_1,2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y+,X-}M_{2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)N_{2m+1,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu)Sin((2m+1)\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty} A_{\nu_1,2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y-,X+}M_{2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)N_{2m+1,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu)Cos((2m+1)\varphi)+$$

$$+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty} A_{\nu_1,2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y-,X-}M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)N_{2m,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu)Sin(2m\varphi)+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty} A_{\nu_2,2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y+,X+}M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)N_{2m,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu)Cos(2m\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty} A_{\nu_2,2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y+,X-}M_{2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)N_{2m+1,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu)Sin((2m+1)\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty} A_{\nu_2,2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y-,X+}M_{2m+1,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)N_{2m+1,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu)Cos((2m+1)\varphi)+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty} A_{\nu_2,2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2,Y-,X-}M_{2m,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)N_{2m,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu)Sin(2m\varphi)$$

.

Et pour le problème homogène en v :

Problème homogène en ν

$$\alpha_{\nu_1}^{\nu} = \alpha_{\nu_2}^{\nu} = 1 \quad et \quad \beta_{\nu_1}^{\nu} = \beta_{\nu_2}^{\nu} = 0$$

$$M(\mu) = A + B\mu \rightarrow \alpha_{\mu_1}^{\mu} \frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu} - \beta_{\mu_1}^{\mu} T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\mu=\mu_1} = 0 \Rightarrow M(\mu)) \propto \alpha_{\mu_1}^{\mu} + \mu_1 \beta_{\mu_1}^{\mu} Log\left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)$$

$$\frac{\alpha_{\mu_2}^{\mu}}{\sqrt{\nu^2 + \mu_2{}^2}} \frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu} + \beta_{\mu_2}^{\mu} T(\mu,\nu,\varphi)\Bigg|_{\mu=\mu_2} = f_{\mu_2}(\nu,\varphi)$$

$$\Rightarrow A_0^{\mu_2} = \frac{\mu_2 \displaystyle\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \frac{\nu\sqrt{\nu^2 + \mu_2{}^2}}{\left(\alpha_{\mu_2}^{\mu}\beta_{\mu_1}^{\mu}\mu_1 + \beta_{\mu_2}^{\mu}\mu_2\sqrt{\nu^2 + \mu_2{}^2}\left(\alpha_{\mu_1}^{\mu} + \mu_1\beta_{\mu_1}^{\mu} Log\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\right)\right)} \int_0^{2\pi} d\varphi\, f_{\mu_2}(\nu,\varphi)}{\pi\left(\nu_2{}^2 - \nu_1{}^2\right)}$$

$$M(\mu) = A + B\mu \rightarrow \alpha_{\mu_2}^{\mu} \frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu} + \beta_{\mu_2}^{\mu} T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\mu=\mu_2} = 0 \Rightarrow M(\mu)) \propto \alpha_{\mu_2}^{\mu} + \mu_2 \beta_{\mu_2}^{\mu} Log\left(\frac{\mu_2}{\mu}\right)$$

$$\frac{\alpha_{\mu_1}^{\mu}}{\sqrt{\nu^2 + \mu_1{}^2}} \frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu} - \beta_{\mu_1}^{\mu} T(\mu,\nu,\varphi)\Bigg|_{\mu=\mu_1} = -f_{\mu_1}(\nu,\varphi)$$

$$\Rightarrow A_0^{\mu_1} = \frac{\mu_1 \displaystyle\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \frac{\nu\sqrt{\nu^2 + \mu_1{}^2}}{\left(\alpha_{\mu_1}^{\mu}\beta_{\mu_2}^{\mu}\mu_2 + \beta_{\mu_2}^{\mu}\mu_1\sqrt{\nu^2 + \mu_1{}^2}\left(\alpha_{\mu_2}^{\mu} + \mu_2\beta_{\mu_2}^{\mu} Log\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\right)\right)} \int_0^{2\pi} d\varphi\, f_{\mu_1}(\nu,\varphi)}{\pi\left(\nu_2{}^2 - \nu_1{}^2\right)}$$

Si $\beta_{\mu_1}^{\mu} = \beta_{\mu_2}^{\mu} = 0 \quad A_0^{\mu_1}$ *et* $A_0^{\mu_2}$ *sont des constantes quelconques puisque*

$$\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu}\Bigg|_{\mu=\mu_1} = \frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu}\Bigg|_{\mu=\mu_2} = 0 \quad et \quad \frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu}\Bigg|_{\nu=\nu_1} = \frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu}\Bigg|_{\nu=\nu_2} = 0$$

Soit la solution complète pour le problème homogène en v :

$$\alpha_{\nu_1}^{\nu} = \alpha_{\nu_2}^{\nu} = 1 \quad et \quad \beta_{\nu_1}^{\nu} = \beta_{\nu_2}^{\nu} = 0$$

$$N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu) = \frac{J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu\right)}{J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} - \frac{Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu\right)}{Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} \quad \lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2} \quad tq \quad \frac{J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)} = \frac{Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}$$

$$N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1) = \frac{J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_1\right)}{J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} - \frac{Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_1\right)}{Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} \quad N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2) = \frac{J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_2\right)}{J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} - \frac{Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_2\right)}{Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$\left\|N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2 = \frac{\nu_2^{\,2}\left(N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)\right)^2\left(1 - \frac{m^2}{\nu_2^{\,2}\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\right)^2}\right) - \nu_1^{\,2}\left(N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)^2\left(1 - \frac{m^2}{\nu_1^{\,2}\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\right)^2}\right)}{2}$$

$$A_0^{\mu_1} = \frac{\mu_1\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \frac{\nu\sqrt{\nu^2+\mu_1^{\,2}}}{\left(\alpha_{\mu_1}^{\mu}\beta_{\mu_2}^{\mu}\mu_2 + \beta_{\mu_2}^{\mu}\mu_1\sqrt{\nu^2+\mu_1^{\,2}}\left(\alpha_{\mu_2}^{\mu} + \mu_2\beta_{\mu_2}^{\mu}Log\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\right)\right)}\int_0^{2\pi} d\varphi\, f_{\mu_1}(\nu,\varphi)}{\pi\left(\nu_2^{\,2} - \nu_1^{\,2}\right)}$$

$$A_0^{\mu_2} = \frac{\mu_2\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \frac{\nu\sqrt{\nu^2+\mu_2^{\,2}}}{\left(\alpha_{\mu_2}^{\mu}\beta_{\mu_1}^{\mu}\mu_1 + \beta_{\mu_2}^{\mu}\mu_2\sqrt{\nu^2+\mu_2^{\,2}}\left(\alpha_{\mu_1}^{\mu} + \mu_1\beta_{\mu_1}^{\mu}Log\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\right)\right)}\int_0^{2\pi} d\varphi\, f_{\mu_2}(\nu,\varphi)}{\pi\left(\nu_2^{\,2} - \nu_1^{\,2}\right)}$$

$$T_{\nu_1,\nu_2}(\mu,\nu,\varphi) = A_0^{\mu 1}\left(\alpha_{\mu_2}^{\mu} + \mu_2\beta_{\mu 2}^{\mu}Log\left(\frac{\mu_2}{\mu}\right)\right) + A_0^{\mu 2}\left(\alpha_{\mu_1}^{\mu} + \mu_1\beta_{\mu_1}^{\mu}Log\left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)\right) +$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty} A_{\mu_1,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X+} M_{2m,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu) N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu) Cos(2m\varphi) + \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty} A_{\mu_1,2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X-} M_{2m+1,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu) N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu) Sin((2m+1)\varphi) +$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty} A_{\mu_1,2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y-,X+} M_{2m+1,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu) N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu) Cos((2m+1)\varphi) + \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty} A_{\mu_1,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y-,X-} M_{2m,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu) N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu) Sin(2m\varphi) +$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty} A_{\mu_2,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X+} M_{2m,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu) N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu) Cos(2m\varphi) + \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty} A_{\mu_2,2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X-} M_{2m+1,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu) N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu) Sin((2m+1)\varphi) +$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty} A_{\mu_2,2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y-,X+} M_{2m+1,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu) N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu) Cos((2m+1)\varphi) + \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty} A_{\mu_2,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y-,X-} M_{2m,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu) N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu) Sin(2m\varphi)$$

.

Pour fixer les idées et simplifier un peu l'expression des diverses solutions exposées précédemment, on va considérer que toutes les conditions aux limites sont de Dirichlet, et que les valeurs limites présentent toutes la symétrie azimutale Y+,X+, soit :

$$f_{\nu_1}(\mu,\varphi)=f_{\nu_1,Y+,X+}(\mu,\varphi)$$
$$f_{\nu_2}(\mu,\varphi)=f_{\nu_2,Y+,X+}(\mu,\varphi)$$
$$f_{\mu_1}(\nu,\varphi)=f_{\mu_1,Y+,X+}(\nu,\varphi)$$
$$f_{\mu_2}(\nu,\varphi)=f_{\mu_2,Y+,X+}(\nu,\varphi)$$

<u>Problème de Dirichlet homogène dans la direction µ avec symétrie azimutale Y+,X+</u>

Dans les expressions précédentes, on pose :

$$\alpha^{\mu}_{\mu_1}=\alpha^{\mu}_{\mu_2}=\alpha^{\nu}_{\nu_1}=\alpha^{\nu}_{\nu_2}=0 \quad et \quad \beta^{\mu}_{\mu_1}=\beta^{\mu}_{\mu_2}=\beta^{\nu}_{\nu_1}=\beta^{\nu}_{\nu_2}=1$$

Les fonctions propres deviennent

$$M^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}(\mu)=\frac{J_m\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\,\mu\right)}{J_m\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\,\mu_1\right)}-\frac{Y_m\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\,\mu\right)}{Y_m\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\,\mu_1\right)} \quad \lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n} \quad tq \quad \frac{J_m\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\,\mu_1\right)}{J_m\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\,\mu_2\right)}=\frac{Y_m\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\,\mu_1\right)}{Y_m\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\,\mu_2\right)} \quad M^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}(\mu_1)=M^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}(\mu_2)=0$$

$$D^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}(\mu_1)=\frac{J_m'\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\,\mu_1\right)}{J_m\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\,\mu_1\right)}-\frac{Y_m'\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\,\mu_1\right)}{Y_m\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\,\mu_1\right)} \quad D^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}(\mu_2)=\frac{J_m'\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\,\mu_2\right)}{J_m\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\,\mu_1\right)}-\frac{Y_m'\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\,\mu_2\right)}{Y_m\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\,\mu_1\right)}$$

$$\left\|M^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}(\mu)\right\|^2=\frac{{\mu_2}^2\left(D^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}(\mu_2)\right)^2-{\mu_1}^2\left(D^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}(\mu_1)\right)^2}{2}$$

Les fonctions dépendantes de ν, en respectant les conditions aux limites homogènes prennent la forme :

$$N^{\nu_1,0}_{m,n}(\nu)=\frac{I_m\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\,\nu\right)}{I_m\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\nu_2\right)}-\frac{K_m\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\,\nu\right)}{K_m\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\nu_2\right)} \quad N^{0,\nu_2}_{m,n}(\nu)=\frac{I_m\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\,\nu\right)}{I_m\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\nu_1\right)}-\frac{K_m\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\,\nu\right)}{K_m\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}\nu_1\right)}.$$

Les deux intégrales et la solution sont donc :

$$A^{\mu_1,\mu_2,Y+,X+}_{\nu_1,2m,n_\mu}=\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\,M^{\mu_1,\mu_2}_{2m,n_\mu}(\mu)\int_0^{\pi}d\varphi\;f_{\nu_1,Y+,X+}(\mu,\varphi)Cos(2m\varphi)$$

$$A^{\mu_1,\mu_2,Y+,X+}_{\nu_2,2m,n_\mu}=\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\,M^{\mu_1,\mu_2}_{2m,n_\mu}(\mu)\int_0^{\pi}d\varphi\;f_{\nu_2,Y+,X+}(\mu,\varphi)Cos(2m\varphi)$$

$$T_{\mu_1,\mu_2}(\mu,\nu,\varphi)=\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}\left(\frac{A^{\mu_1,\mu_2,Y+,X+}_{\nu_1,2m,n_\mu}}{\left(1+\partial_{2m,0}\right)}\frac{N^{\nu_1,0}_{2m,n_\mu}(\nu)}{N^{\nu_1,0}_{2m,n_\mu}(\nu_1)}+\frac{A^{\mu_1,\mu_2,Y+,X+}_{\nu_2,2m,n_\mu}}{\left(1+\partial_{2m,0}\right)}\frac{N^{0,\nu_2}_{2m,n_\mu}(\nu)}{N^{0,\nu_2}_{2m,n_\mu}(\nu_2)}\right)\frac{M^{\mu_1,\mu_2}_{2m,n_\mu}(\mu)}{\left\|M^{\mu_1,\mu_2}_{2m,n_\mu}(\mu)\right\|^2}Cos(2m\varphi).$$

Problème de Dirichlet homogène dans la direction v avec symétrie azimutale Y+,X+

Dans les expressions précédentes, on pose :

$$\alpha_{\mu_1}^{\mu} = \alpha_{\mu_2}^{\mu} = \alpha_{\nu_1}^{\nu} = \alpha_{\nu_2}^{\nu} = 0 \quad et \quad \beta_{\mu_1}^{\mu} = \beta_{\mu_2}^{\mu} = \beta_{\nu_1}^{\nu} = \beta_{\nu_2}^{\nu} = 1$$

Les fonctions propres deviennent :

$$N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu) = \frac{J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu\right)}{J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} - \frac{Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu\right)}{Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} \quad \lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2} \quad tq \quad \frac{J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)} = \frac{Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)} \quad N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1) = N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2) = 0$$

$$D_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1) = \frac{J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} - \frac{Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_1\right)} \quad \frac{N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}{}'(\nu_2)}{\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}} = D_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2) = \frac{J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}{J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} - \frac{Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}{Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$\left\|N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2 = \frac{\nu_2{}^2\left(D_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)\right)^2 - \nu_1{}^2\left(D_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)^2}{2}$$

Les fonctions dépendantes de μ, en respectant les conditions aux limites homogènes prennent la forme :

$$M_{m,n}^{0,\mu_2}(\mu) = \frac{I_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{I_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_1\right)} - \frac{K_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{K_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_1\right)} \quad M_{m,n}^{0,\mu_2}{}'(\mu) = \frac{I_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{I_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_1\right)} - \frac{K_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{K_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_1\right)}$$

$$M_{m,n}^{\mu_1,0}(\mu) = \frac{I_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{I_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_2\right)} - \frac{K_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{K_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_2\right)} \quad M_{m,n}^{\mu_1,0}{}'(\mu) = \frac{I_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{I_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_2\right)} - \frac{K_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{K_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_2\right)}$$

Les deux intégrales et la solution sont donc :

$$A_{\mu_1,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X+} = \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\, \nu\, N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu) \int_0^{\pi} d\varphi\, f_{\mu_1,Y+,X+}(\nu,\varphi) Cos(2m\varphi)$$

$$A_{\mu_2,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X+} = \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\, \nu\, N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu) \int_0^{\pi} d\varphi\, f_{\mu_2,Y+,X+}(\nu,\varphi) Cos(2m\varphi)$$

$$T_{\nu_1,\nu_2}(\mu,\nu,\varphi) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n_\nu=1}^{+\infty} \left(\frac{A_{\mu_1,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X+}}{\left(1+\partial_{2m,0}\right)} \frac{M_{2m,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu)}{M_{2m,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu_1)} + \frac{A_{\mu_2,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X+}}{\left(1+\partial_{2m,0}\right)} \frac{M_{2m,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu)}{M_{2m,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu_2)} \right) \frac{N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)}{\left\|N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2} Cos(2m\varphi)$$

Problème de Dirichlet avec valeur en limite indépendante de l'angle azimutal

C'est un sous-cas du cas précédent, avec :
$f_{\nu_1}(\mu,\varphi)=f_{\nu_1}(\mu)\quad f_{\nu_2}(\mu,\varphi)=f_{\nu_2}(\mu)\quad f_{\mu_1}(\nu,\varphi)=f_{\mu_1}(\nu)\quad f_{\mu_2}(\nu,\varphi)=f_{\mu_2}(\nu)$. *Il est facile de voir que toutes les intégrales azimutales s'annulent sauf pour le cas m=0. Puisque* $\int_0^{\pi} d\varphi\, Cos(2m\varphi)=\pi\partial_{m,0}$.

Il vient la solution (on enlève le symbole de symétrie Y+,X+) :

$$M_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)=\frac{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}-\frac{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}\quad \lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\quad tq\quad \frac{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_2\right)}=\frac{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_2\right)}$$

$$D_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_1)=\frac{J_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu_1\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}-\frac{Y_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu_1\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}\quad D_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_2)=\frac{J_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu_2\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}-\frac{Y_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu_2\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}$$

$$\left\|M_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\right\|^2=\frac{{\mu_2}^2\left(D_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_2)\right)^2-{\mu_1}^2\left(D_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_1)\right)^2}{2}$$

$$N_{0,n}^{\nu_1,0}(\nu)=\frac{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\nu\right)}{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_2\right)}-\frac{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\nu\right)}{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_2\right)}\quad N_{0,n}^{0,\nu_2}(\nu)=\frac{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\nu\right)}{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_1\right)}-\frac{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\nu\right)}{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_1\right)}$$

$$A_{\nu_1,0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}=\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\,M_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)f_{\nu_1}(\mu)\quad A_{\nu_2,0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}=\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\,M_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)f_{\nu_2}(\mu)$$

$$T_{\mu_1,\mu_2}(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}\left(A_{\nu_1,0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}\,\frac{N_{0,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu)}{N_{0,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu_1)}+A_{\nu_2,0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}\,\frac{N_{0,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu)}{N_{0,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu_2)}\right)\frac{M_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)}{\left\|M_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\right\|^2}$$

$$N_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)=\frac{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}\quad \lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\quad tq\quad \frac{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}=\frac{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}$$

$$D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)=\frac{J_1\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_1\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}\quad D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)=\frac{J_1\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_2\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_1\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_2\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$\left\|N_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2=\frac{{\nu_2}^2\left(D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)\right)^2-{\nu_1}^2\left(D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)^2}{2}$$

$$M_{0,n}^{0,\mu_2}(\mu)=\frac{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu\right)}{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu_1\right)}-\frac{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu\right)}{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu_1\right)}\quad M_{0,n}^{\mu_1,0}(\mu)=\frac{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu\right)}{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu_2\right)}-\frac{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu\right)}{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu_2\right)}$$

$$A_{\mu_1,0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}=\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\nu\,N_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)f_{\mu_1}(\nu)\quad A_{\mu_2,0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}=\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\nu\,N_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)f_{\mu_2}(\nu)$$

$$T_{\nu_1,\nu_2}(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{n_\nu=1}^{+\infty}\left(A_{\mu_1,0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}\,\frac{M_{0,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu)}{M_{0,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu_1)}+A_{\mu_2,0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}\,\frac{M_{0,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu)}{M_{0,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu_2)}\right)\frac{N_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)}{\left\|N_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2}$$

.

Problème de Dirichlet avec valeur en limite constante

C'est encore un sous-cas du cas précédent, avec :

$$f_{\nu_1}(\mu,\varphi)=T_{\nu_1} \quad f_{\nu_2}(\mu,\varphi)=T_{\nu_2} \quad f_{\mu_1}(\nu,\varphi)=T_{\mu_1} \quad f_{\mu_2}(\nu,\varphi)=T_{\mu_2}$$

Il vient :

$$M_{0,n}^{\mu_1,0}(\mu)=\frac{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_2\right)}-\frac{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_2\right)} \quad M_{0,n}^{0,\mu_2}(\mu)=\frac{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_1\right)}-\frac{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_1\right)}$$

$$M_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)=\frac{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}-\frac{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)} \quad \lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2} \quad tq \quad \frac{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_2\right)}=\frac{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_2\right)}$$

$$D_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_1)=\frac{J_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}-\frac{Y_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)} \quad D_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_2)=\frac{J_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_2\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}-\frac{Y_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_2\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}$$

$$\left\|M_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\right\|^2=\frac{{\mu_2}^2\left(D_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_2)\right)^2-{\mu_1}^2\left(D_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_1)\right)^2}{2}=\frac{\left(\mu_2D_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_2)+\mu_1D_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_1)\right)\left(\mu_2D_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_2)-\mu_1D_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_1)\right)}{2}$$

$$N_{0,n}^{\nu_1,0}(\nu)=\frac{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu\right)}{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_2\right)}-\frac{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu\right)}{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_2\right)} \quad N_{0,n}^{0,\nu_2}(\nu)=\frac{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu\right)}{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_1\right)}-\frac{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu\right)}{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\nu_1\right)}$$

$$N_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)=\frac{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} \quad \lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2} \quad tq \quad \frac{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}=\frac{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}$$

$$D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)=\frac{J_1\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_1\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} \quad D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)=\frac{J_1\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_1\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$\left\|N_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2=\frac{{\nu_2}^2\left(D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)\right)^2-{\nu_1}^2\left(D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)^2}{2}=\frac{\left(\nu_2D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)+\nu_1D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)\left(\nu_2D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)-\nu_1D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)}{2}$$

Dans ce cas on peut calculer les intégrales des fonctions de Bessel :

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\,M_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)=\frac{1}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\,J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu\right)-\frac{1}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\,Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu\right)$$

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\,M_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)=\frac{\left[\mu_2\,J_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_2\right)-\mu_1\,J_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)\right]}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}}-\frac{\left[\mu_2\,Y_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_2\right)-\mu_1\,Y_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)\right]}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}}$$

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\,M_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)=\frac{1}{\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}}\left(\mu_2\left(\frac{J_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_2\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}-\frac{Y_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_2\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}\right)-\mu_1\left(\frac{J_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}-\frac{Y_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}\right)\right)$$

$$\Rightarrow\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\,M_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)=\frac{\mu_2D_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_2)-\mu_1D_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_1)}{\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}}$$

$$De\ m\hat{e}me\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\nu\,N_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)=\frac{\nu_2D_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)-\nu_1D_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)}{\lambda_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}}$$

.

Ce qui donne la solution :

$$A_{\nu_1,0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2} = \frac{2T_{\nu_1}}{\lambda_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}\left(\mu_2 D_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_2) + \mu_1 D_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_1)\right) N_{0,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu_1)} \quad A_{\nu_2,0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2} = \frac{2T_{\nu_2}}{\lambda_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}\left(\mu_2 D_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_2) + \mu_1 D_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_1)\right) N_{0,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu_2)}$$

$$A_{\mu_1,0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2} = \frac{2T_{\mu_1}}{\lambda_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}\left(\nu_2 D_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\mu_2) + \nu_1 D_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\mu_1)\right) M_{0,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu_1)} \quad A_{\mu_2,0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2} = \frac{2T_{\mu_2}}{\lambda_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}\left(\nu_2 D_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\mu_2) + \nu_1 D_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\mu_1)\right) M_{0,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu_2)}$$

$$T_{\mu_1,\mu_2}(\mu,\nu) = 2\sum_{n_\mu=1}^{+\infty} \frac{\left(T_{\nu_1}\dfrac{N_{0,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu)}{N_{0,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu_1)} + T_{\nu_2}\dfrac{N_{0,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu)}{N_{0,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu_2)}\right)}{\lambda_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}\left(\mu_2 D_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_2) + \mu_1 D_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_1)\right)} M_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)$$

$$T_{\nu_1,\nu_2}(\mu,\nu) = 2\sum_{n_\nu=1}^{+\infty} \frac{\left(T_{\mu_1}\dfrac{M_{0,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu)}{M_{0,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu_1)} + T_{\mu_2}\dfrac{M_{0,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu)}{M_{0,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu_2)}\right)}{\lambda_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}\left(\nu_2 D_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\mu_2) + \nu_1 D_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\mu_1)\right)} N_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)$$

$$T(\mu,\nu) = T_{\mu_1,\mu_2}(\mu,\nu) + T_{\nu_1,\nu_2}(\mu,\nu)$$

$$T(\mu,\nu) = 2\sum_{n_\mu=1}^{+\infty} \frac{\left(T_{\nu_1}\dfrac{N_{0,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu)}{N_{0,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu_1)} + T_{\nu_2}\dfrac{N_{0,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu)}{N_{0,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu_2)}\right)}{\lambda_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}\left(\mu_2 D_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_2) + \mu_1 D_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_1)\right)} M_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu) + 2\sum_{n_\nu=1}^{+\infty} \frac{\left(T_{\mu_1}\dfrac{M_{0,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu)}{M_{0,n_\nu}^{\mu_1,0}(\mu_1)} + T_{\mu_2}\dfrac{M_{0,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu)}{M_{0,n_\nu}^{0,\mu_2}(\mu_2)}\right)}{\lambda_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}\left(\nu_2 D_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\mu_2) + \nu_1 D_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\mu_1)\right)} N_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)$$

On peut également développer la solution en remplaçant les fonctions par leurs expressions, ce qui donne :

$$M_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu) = \frac{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)} - \frac{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)} \quad \lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2} \quad tq \quad \frac{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_2\right)} = \frac{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_2\right)}$$

$$D_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_1) = \frac{J_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu_1\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)} - \frac{Y_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu_1\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)} \quad D_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_2) = \frac{J_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu_2\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)} - \frac{Y_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\,\mu_2\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}\mu_1\right)}$$

$$N_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu) = \frac{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} - \frac{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} \quad \lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2} \quad tq \quad \frac{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)} = \frac{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}$$

$$D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1) = \frac{J_1\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} - \frac{Y_1\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} \quad D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2) = \frac{J_1\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_2\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} - \frac{Y_1\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_2\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$T(\mu,\nu) = 2\sum_{n_\mu=1}^{+\infty} \frac{\left(I_0\left(\lambda_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}\,\nu\right)\left(T_{\nu_1}K_0\left(\lambda_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}\nu_2\right) - T_{\nu_2}K_0\left(\lambda_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}\nu_1\right)\right) - K_0\left(\lambda_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}\,\nu\right)\left(T_{\nu_1}I_0\left(\lambda_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}\nu_2\right) - T_{\nu_2}I_0\left(\lambda_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}\nu_1\right)\right)\right)}{\lambda_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}\left(\mu_2 D_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_2) + \mu_1 D_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu_1)\right)\left(I_0\left(\lambda_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}\,\nu_1\right)K_0\left(\lambda_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}\nu_2\right) - K_0\left(\lambda_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}\,\nu_1\right)I_0\left(\lambda_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}\nu_2\right)\right)} M_{0,n_\mu}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)$$

$$+ 2\sum_{n_\nu=1}^{+\infty} \frac{\left(I_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu\right)\left(T_{\mu_1}K_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_2\right) - T_{\mu_2}K_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_1\right)\right) - K_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu\right)\left(T_{\mu_1}I_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_2\right) - T_{\mu_2}I_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_1\right)\right)\right)}{\lambda_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}\left(\nu_2 D_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\mu_2) + \nu_1 D_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\mu_1)\right)\left(I_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu_1\right)K_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_2\right) - K_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu_1\right)I_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\mu_2\right)\right)} N_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)$$

.

Exemple : Problème homogène en µ de Neumann, homogène de Dirichlet en v=v1, et inhomogène de Neumann v2 à flux constant

Prenons un autre exemple simple pour le problème homogène en µ, avec un flux constant sur la surface v=v2 et une valeur fixe nulle sur v=v1, on a :

$$\alpha^{\mu}_{\mu_1} = \alpha^{\mu}_{\mu_2} = 1 \quad et \quad \beta^{\mu}_{\mu_1} = \beta^{\mu}_{\mu_2} = 0$$

$$\alpha^{\nu}_{\nu_1} = 0 \quad \beta^{\nu}_{\nu_1} = 1 \quad f_{\nu_1}(\mu,\varphi) = 0 \quad \alpha^{\nu}_{\nu_2} = 1 \quad \beta^{\nu}_{\nu_2} = 0 \quad f_{\nu_2}(\mu,\varphi) = \Phi_{\nu_2} \Rightarrow \frac{\alpha^{\nu}_{\nu_2}}{\sqrt{\mu^2+\nu_2{}^2}} \frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu}\Bigg|_{\nu=\nu_2} = \Phi_{\nu_2}$$

$$Terme\ de\ valeur\ propre\ nulle = A_0\left(\alpha^{\nu}_{\nu_1} + \beta^{\nu}_{\nu_1} Log\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)\right) = A_0 \nu_1 Log\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)$$

$$\Rightarrow A_0 = \frac{2\nu_2 \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu\, \mu \sqrt{\mu^2+\nu_2{}^2}\, \Phi_{\nu_2}}{\nu_1\left(\mu_2{}^2 - \mu_1{}^2\right)} = \frac{2\nu_2 \Phi_{\nu_2}\left(\left(\mu_2{}^2+\nu_2{}^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\mu_1{}^2+\nu_2{}^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)}{3\nu_1\left(\mu_2{}^2 - \mu_1{}^2\right)}$$

Le développement en série pour ce même problème, où seuls subsistent les termes en m=0 :

$$M^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}(\mu) = \frac{J_0\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\mu\right)}{J_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\mu_1\right)} - \frac{Y_0\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\mu\right)}{Y_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\mu_1\right)} \quad \lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n} \quad tq \quad \frac{J_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\mu_1\right)}{J_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\mu_2\right)} = \frac{Y_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\mu_1\right)}{Y_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\mu_2\right)}$$

$$\left\|M^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}(\mu)\right\|^2 = \frac{\mu_2{}^2\left(M^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}(\mu_2)\right)^2 - \mu_1{}^2\left(M^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}(\mu_1)\right)^2}{2}$$

$$N^{0,\nu_2}_{0,n}(\nu) = \frac{I_0\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\nu\right)}{I_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\nu_1\right)} - \frac{K_0\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\nu\right)}{K_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\nu_1\right)} \quad \frac{N^{0,\nu_2}_{0,n}{}'(\nu_2)}{\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}} = \frac{I_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\nu_2\right)}{I_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\nu_1\right)} - \frac{K_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\nu_2\right)}{K_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\nu_1\right)}$$

$$A_0 = \frac{2\nu_2 \Phi_{\nu_2}\left(\left(\mu_2{}^2+\nu_2{}^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\mu_1{}^2+\nu_2{}^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)}{3\left(\mu_2{}^2 - \mu_1{}^2\right)} \quad A^{\mu_1,\mu_2}_{\nu_2,0,n_\mu} = \frac{2\Phi_{\nu_2}\int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu\, \mu\, M^{\mu_1,\mu_2}_{0,n_\mu}(\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_2{}^2}}{\left(\mu_2{}^2\left(M^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}(\mu_2)\right)^2 - \mu_1{}^2\left(M^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}(\mu_1)\right)^2\right) N^{0,\nu_2}_{0,n_\mu}{}'(\nu_2)}$$

$$T_{\mu_1,\mu_2}(\mu,\nu) = A_0 Log\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right) + \sum_{n_\mu=1}^{+\infty} A^{\mu_1,\mu_2}_{\nu_2,0,n_\mu}\left(\frac{J_0\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\mu\right)}{J_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\mu_1\right)} - \frac{Y_0\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\mu\right)}{Y_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\mu_1\right)}\right)\left(\frac{I_0\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\nu\right)}{I_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\nu_1\right)} - \frac{K_0\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\nu\right)}{K_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\nu_1\right)}\right)$$

Exemple : Problème homogène en µ de Neumann, homogène de Dirichlet en v=v1, et inhomogène de Dirichlet v2 à valeur constante

Prenons un autre exemple simple pour le problème homogène en µ, avec un flux constant sur la surface v=v2 et une valeur fixe nulle sur v=v1, on a :

$$\alpha^{\mu}_{\mu_1} = \alpha^{\mu}_{\mu_2} = 1 \quad et \quad \beta^{\mu}_{\mu_1} = \beta^{\mu}_{\mu_2} = 0$$

$$\alpha^{\nu}_{\nu_1} = 0 \quad \beta^{\nu}_{\nu_1} = 1 \quad f_{\nu_1}(\mu,\varphi) = 0$$

$$\alpha^{\nu}_{\nu_2} = 0 \quad \beta^{\nu}_{\nu_2} = 1 \quad f_{\nu_2}(\mu,\varphi) = T_{\nu_2} \Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_2} = T_{\nu_2}$$

$$Terme\ de\ valeur\ propre\ nulle = A_0\left(\alpha^{\nu}_{\nu_1} + \beta^{\nu}_{\nu_1} Log\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)\right) = A_0 \nu_1 Log\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)$$

$$\Rightarrow A_0 = \frac{2T_{\nu_2}\int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu\,\mu}{\nu_1\left(\mu_2^{\,2} - \mu_1^{\,2}\right) Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)} = \frac{T_{\nu_2}}{\nu_1 Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)} \quad Terme\ de\ valeur\ propre\ nulle = T_{\nu_2}\frac{Log\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)}{Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)}$$

Le développement en série pour ce même problème, où seul subsiste le terme de valeur propre nulle :

$$M^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}(\mu) = \frac{J_0\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\,\mu\right)}{J_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\,\mu_1\right)} - \frac{Y_0\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\,\mu\right)}{Y_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\,\mu_1\right)} \quad \lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n} \quad tq \quad \frac{J_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\,\mu_1\right)}{J_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\,\mu_2\right)} = \frac{Y_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\,\mu_1\right)}{Y_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\,\mu_2\right)}$$

$$\left\|M^{\mu_1,\mu_2}_{m,n}(\mu)\right\|^2 = \frac{\mu_2^{\,2}\left(M^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}(\mu_2)\right)^2 - \mu_1^{\,2}\left(M^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}(\mu_1)\right)^2}{2} \quad N^{0,\nu_2}_{0,n}(\nu) = \frac{I_0\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\,\nu\right)}{I_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\,\nu_1\right)} - \frac{K_0\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\,\nu\right)}{K_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\,\nu_1\right)}$$

$$A^{\mu_1,\mu_2}_{\nu_2,0,n_\mu} = \frac{2T_{\nu_2}\int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu\,\mu\left(\frac{J_0\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\,\mu\right)}{J_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\,\mu_1\right)} - \frac{Y_0\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\,\mu\right)}{Y_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\,\mu_1\right)}\right)}{\left(\mu_2^{\,2}\left(M^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}(\mu_2)\right)^2 - \mu_1^{\,2}\left(M^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}(\mu_1)\right)^2\right) N^{0,\nu_2}_{0,n_\mu}(\nu_2)} \propto \left[\mu\left(\frac{J_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\,\mu\right)}{J_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\,\mu_1\right)} - \frac{Y_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\,\mu\right)}{Y_1\left(\lambda^{\mu_1,\mu_2}_{0,n}\,\mu_1\right)}\right)\right]_{\mu_1}^{\mu_2} = 0$$

$$\Rightarrow T_{\mu_1,\mu_2}(\mu,\nu) = T_{\nu_2}\frac{Log\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)}{Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)}$$

Si l'on a le problème suivant, avec deux températures distinctes, on trouve immédiatement :

$$\alpha^{\mu}_{\mu_1} = \alpha^{\mu}_{\mu_2} = 1 \quad et \quad \beta^{\mu}_{\mu_1} = \beta^{\mu}_{\mu_2} = 0$$

$$\alpha^{\nu}_{\nu_2} = 0 \quad \beta^{\nu}_{\nu_2} = 1 \quad f_{\nu_1}(\mu,\varphi) = T_{\nu_1} \Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_1} = T_{\nu_1} \quad f_{\nu_2}(\mu,\varphi) = T_{\nu_2} \Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_2} = T_{\nu_2}$$

$$T(\mu,\nu) = T_{\nu_1}\frac{Log\left(\frac{\nu_2}{\nu}\right)}{Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)} + T_{\nu_2}\frac{Log\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)}{Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)}$$

Paraboloïde semi-creux de révolution soumis à des conditions aux limites dépendantes ou indépendantes de l'angle azimutal

Exemple : *Soit un paraboloïde de révolution creux* $(\mu,\nu,\varphi)\in\Omega=[0,\mu_0]\times[\nu_1,\nu_2]\times[0,2\pi]$ *dans lequel les conditions dépendent maintenant de l'angle azimutal sur le paraboloïde de révolution :*

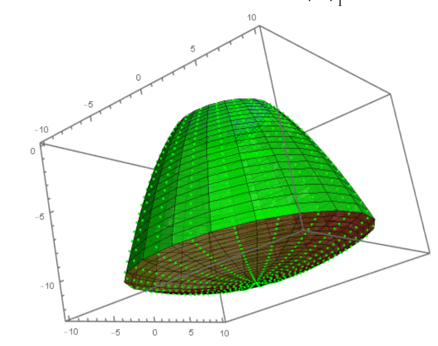
$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}\right)+\frac{1}{\mu^2\nu^2}\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

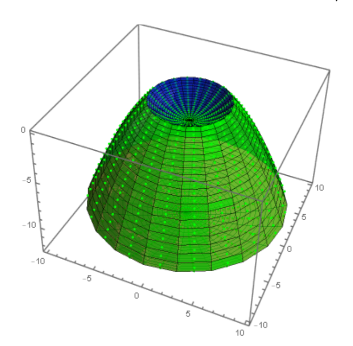
$$(\mu,\nu,\varphi)\in\Omega=[0,\mu_0]\times[\nu_1,\nu_2]\times[0,2\pi]\quad T(\mu,\nu,\varphi)\ fini$$

$$Cas\ envisagés : Dirichlet\ ou\ Neumann \Rightarrow \alpha^{\mu}_{\mu_0}\in\{0,1\}\quad \beta^{\mu}_{\mu_0}\in\{0,1\}\quad \alpha^{\nu}_{\nu_1},\alpha^{\nu}_{\nu_2}\in\{0,1\}\quad \beta^{\nu}_{\nu_1},\beta^{\nu}_{\nu_2}\in\{0,1\}$$

$$\alpha^{\mu}_{\mu_0}=1-\beta^{\mu}_{\mu_0}\quad \alpha^{\nu}_{\nu_1}=1-\beta^{\nu}_{\nu_1}\quad \alpha^{\nu}_{\nu_2}=1-\beta^{\nu}_{\nu_2}\quad \left.\frac{\alpha^{\mu}_{\mu_0}}{\sqrt{\mu_0^{\ 2}+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta^{\mu}_{\mu_0}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\mu=\mu_0}=f_{\mu_0}(\nu,\varphi)$$

$$\left.\frac{\alpha^{\nu}_{\nu_1}}{\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\ 2}}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta^{\nu}_{\nu_1}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_1}=-f_{\nu_1}(\mu,\varphi)\qquad \left.\frac{\alpha^{\nu}_{\nu_2}}{\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\ 2}}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta^{\nu}_{\nu_2}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_2}=f_{\nu_2}(\mu,\varphi)$$





Problème que l'on sépare en deux sous-problèmes avec d'abord les conditions homogènes dans la direction μ :

$$\left.\frac{\alpha^{\mu}_{\mu_0}}{\sqrt{\mu_0^{\ 2}+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta^{\mu}_{\mu_0}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\mu=\mu_0}=0$$

$$\left.\frac{\alpha^{\nu}_{\nu_1}}{\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\ 2}}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta^{\nu}_{\nu_1}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_1}=-f_{\nu_1}(\mu,\varphi)\qquad \left.\frac{\alpha^{\nu}_{\nu_2}}{\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\ 2}}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta^{\nu}_{\nu_2}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_2}=f_{\nu_2}(\mu,\varphi)$$

Et celui homogène dans la direction ν :

$$\left.\frac{\alpha^{\mu}_{\mu_0}}{\sqrt{\mu_2^{\ 2}+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta^{\mu}_{\mu_0}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\mu=\mu_0}=f_{\mu_0}(\nu,\varphi)$$

$$\left.\frac{\alpha^{\nu}_{\nu_1}}{\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\ 2}}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta^{\nu}_{\nu_1}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_1}=0\qquad \left.\frac{\alpha^{\nu}_{\nu_2}}{\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\ 2}}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta^{\nu}_{\nu_2}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_2}=0$$

Toutes les fonctions limites sont décomposées par symétries azimutales :

$$f_{\nu_1}(\mu,\varphi)=f_{\nu_1,Y+,X+}(\mu,\varphi)+f_{\nu_2,Y+,X-}(\mu,\theta)+f_{\nu_1,Y-,X+}(\mu,\theta)+f_{\nu_1,Y-,X-}(\mu,\theta),$$

$$\textit{sachant que } f_{\nu_1}(\mu,\varphi)=f_{\nu_1}(\mu,2\pi+\varphi)$$

$$f_{\nu_1,Y+,X+}(\mu,\varphi)=\frac{f_{\nu_1}(\mu,\varphi)+f_{\nu_1}(\mu,\pi-\varphi)+f_{\nu_1}(\mu,-\varphi)+f_{\nu_1}(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\nu_1,Y+,X-}(\mu,\varphi)=\frac{f_{\nu_1}(\mu,\varphi)+f_{\nu_1}(\mu,\pi-\varphi)-f_{\nu_1}(\mu,-\varphi)-f_{\nu_1}(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\nu_1,Y-,X+}(\mu,\varphi)=\frac{f_{\nu_1}(\mu,\varphi)-f_{\nu_1}(\mu,\pi-\varphi)+f_{\nu_1}(\mu,-\varphi)-f_{\nu_1}(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\nu_1,Y-,X-}(\mu,\varphi)=\frac{f_{\nu_1}(\mu,\varphi)-f_{\nu_1}(\mu,\pi-\varphi)-f_{\nu_1}(\mu,-\varphi)+f_{\nu_1}(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\nu_2}(\mu,\varphi)=f_{\nu_2,Y+,X+}(\mu,\varphi)+f_{\nu_2,Y+,X-}(\mu,\theta)+f_{\nu_2,Y-,X+}(\mu,\theta)+f_{\nu_2,Y-,X-}(\mu,\theta),$$

$$\textit{sachant que } f_{\nu_2}(\mu,\varphi)=f_{\nu_2}(\mu,2\pi+\varphi)$$

$$f_{\nu_2,Y+,X+}(\mu,\varphi)=\frac{f_{\nu_2}(\mu,\varphi)+f_{\nu_2}(\mu,\pi-\varphi)+f_{\nu_2}(\mu,-\varphi)+f_{\nu_2}(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\nu_2,Y+,X-}(\mu,\varphi)=\frac{f_{\nu_2}(\mu,\varphi)+f_{\nu_2}(\mu,\pi-\varphi)-f_{\nu_2}(\mu,-\varphi)-f_{\nu_2}(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\nu_2,Y-,X+}(\mu,\varphi)=\frac{f_{\nu_2}(\mu,\varphi)-f_{\nu_2}(\mu,\pi-\varphi)+f_{\nu_2}(\mu,-\varphi)-f_{\nu_2}(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\nu_2,Y-,X-}(\mu,\varphi)=\frac{f_{\nu_2}(\mu,\varphi)-f_{\nu_2}(\mu,\pi-\varphi)-f_{\nu_2}(\mu,-\varphi)+f_{\nu_2}(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\mu_0}(\nu,\varphi)=f_{\mu_0,Y+,X+}(\nu,\varphi)+f_{\mu_0,Y+,X-}(\nu,\theta)+f_{\mu_0,Y-,X+}(\nu,\theta)+f_{\mu_0,Y-,X-}(\nu,\theta),$$

$$\textit{sachant que } f_{\mu_0}(\nu,\varphi)=f_{\mu_0}(\nu,2\pi+\varphi)$$

$$f_{\mu_0,Y+,X+}(\nu,\varphi)=\frac{f_{\mu_0}(\nu,\varphi)+f_{\mu_0}(\nu,\pi-\varphi)+f_{\mu_0}(\nu,-\varphi)+f_{\mu_0}(\nu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\mu_0,Y+,X-}(\nu,\varphi)=\frac{f_{\mu_0}(\nu,\varphi)+f_{\mu_0}(\nu,\pi-\varphi)-f_{\mu_0}(\nu,-\varphi)-f_{\mu_0}(\nu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\mu_0,Y-,X+}(\nu,\varphi)=\frac{f_{\mu_0}(\nu,\varphi)-f_{\mu_0}(\nu,\pi-\varphi)+f_{\mu_0}(\nu,-\varphi)-f_{\mu_0}(\nu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{\mu_0,Y-,X-}(\nu,\varphi)=\frac{f_{\mu_0}(\nu,\varphi)-f_{\mu_0}(\nu,\pi-\varphi)-f_{\mu_0}(\nu,-\varphi)+f_{\mu_0}(\nu,\varphi-\pi)}{4}$$

.

Chaque type de symétrie implique un terme azimutale sous la forme Cos(2mϕ), Sin((2m+1)ϕ), Sin(2mϕ), Cos((2m+1)ϕ). Pour les fonctions propres que l'on soit dans le problème homogène dans la direction μ ou ν, l'indice m sera donc tantôt 2m, ou 2m+1 suivant le type de symétrie de la décomposition des conditions aux limites.

Les fonctions propres et normes pour les solutions homogènes en μ, respectant les conditions aux limites, deviennent :

$$M_{m,n}^{\mu_0}(\mu)=J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\quad \lambda_{m,n}^{\mu_0}\quad tq\quad \alpha_{\mu_0}^{\mu}\,\lambda_{m,n}^{\mu_0}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu_0\right)+\beta_{\mu_0}^{\mu}\,J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\mu_0\right)=0$$

$$\left\|M_{m,n}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2=\frac{\mu_0^{\,2}\left(\left(J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\right)^2+\left(J_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\mu\right)\right)^2\left(1-\dfrac{m^2}{\mu_0^{\,2}\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\right)^2}\right)\right)}{2}$$

Les fonctions dépendantes de ν pour les solutions homogènes en μ, en respectant les conditions aux limites homogènes prennent la forme :

$$\alpha_{\nu_1}^{\nu}\frac{\partial N_{m,n}^{0,\nu_2}(\nu)}{\partial\nu}-\beta_{\nu_1}^{\nu}\,N_{m,n}^{0,\nu_2}(\nu)\bigg|_{\nu=\nu_1}=0\Rightarrow N_{m,n}^{0,\nu_2}(\nu)=\frac{I_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\,\lambda_{m,n}^{\mu_0}I_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}\,I_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\nu_1\right)}-\frac{K_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\,\lambda_{m,n}^{\mu_0}K_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}\,K_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\nu_1\right)}$$

$$\alpha_{\nu_2}^{\nu}\frac{\partial N_{m,n}^{\nu_1,0}(\nu)}{\partial\nu}+\beta_{\nu_2}^{\nu}\,N_{m,n}^{\nu_1,0}(\nu)\bigg|_{\nu=\nu_2}=0\Rightarrow N_{m,n}^{\nu_1,0}(\nu)=\frac{I_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\nu\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\,\lambda_{m,n}^{\mu_0}I_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\nu_2\right)+\beta_{\nu_2}^{\nu}\,I_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\nu_2\right)}-\frac{K_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\,\nu\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\,\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}K_m'\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\nu_2\right)+\beta_{\nu_2}^{\nu}K_m\left(\lambda_{m,n}^{\mu_0}\nu_2\right)}$$

Les fonctions propres et normes pour les solutions homogènes en ν, respectant les conditions aux limites, sont:

$$N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)=\frac{J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}\,J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}\,Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\quad tq\quad \frac{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}\,J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)+\beta_{\nu_2}^{\nu}\,J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}=\frac{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}\,Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)+\beta_{\nu_2}^{\nu}\,Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}$$

$$N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)=\frac{J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}\,J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}\,Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)=\frac{J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_2\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}\,J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_2\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}\,Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$\frac{N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}{}'(\nu_1)}{\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}}=D_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)=\frac{J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}\,J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}\,Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$\frac{N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}{}'(\nu_2)}{\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}}=D_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)=\frac{J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_2\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}J_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}\,J_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_2\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}Y_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}\,Y_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$\left\|N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2=\frac{\nu_2^{\,2}\left(\left(D_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)\right)^2+\left(N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)\right)^2\left(1-\dfrac{m^2}{\nu_2^{\,2}\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\right)^2}\right)\right)-\nu_1^{\,2}\left(\left(D_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)^2+\left(N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)^2\left(1-\dfrac{m^2}{\nu_1^{\,2}\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\right)^2}\right)\right)}{2}$$

Les fonctions dépendantes de μ sont de la forme :

$$M_{m,n}^{\mu_0}(\mu)=\frac{I_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu\right)}{\alpha_{\mu_0}^{\mu}\,\lambda_{m,n}^{\mu_1,\mu_2}I_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu_0\right)+\beta_{\mu_0}^{\mu}\,I_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu_0\right)}\qquad M_{m,n}^{\mu_0}{}'(\mu)=\frac{I_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu\right)}{\alpha_{\mu_0}^{\mu}\,\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}I_m'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu_1\right)+\beta_{\mu_0}^{\mu}\,I_m\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu_0\right)}$$

Les huit intégrales par symétrie azimutale du problème homogène en μ *sont :*

$$A_{\nu_1,2m,n_\mu}^{\mu_0,Y+,X+} = \frac{2\int_0^{\mu_0} d\mu\,\mu \frac{J_{2m}\left(\lambda_{2m,n_\mu}^{\mu_0}\mu\right)\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}\int_0^{\pi} d\varphi\; f_{\nu_1,Y+,X+}(\mu,\varphi)Cos(2m\varphi)}{\left(\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}\,\beta_{\nu_1}^{\nu} N_{2m,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu_1)-\alpha_{\nu_1}^{\nu} N_{2m,n_\mu}^{\nu_1,0}{}'(\nu_1)\right)}}{\pi\left(1+\partial_{2m,0}\right)\left\|M_{2m,n_\mu}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2}$$

$$A_{\nu_1,2m+1,n_\mu}^{\mu_0,Y+,X-} = \frac{2\int_0^{\mu_0} d\mu\,\mu \frac{J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n_\mu}^{\mu_0}\mu\right)\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}\int_0^{\pi} d\varphi\; f_{\nu_1,Y+,X-}(\mu,\varphi)Sin\left((2m+1)\varphi\right)}{\left(\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}\,\beta_{\nu_1}^{\nu} N_{2m+1,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu_1)-\alpha_{\nu_1}^{\nu} N_{2m+1,n_\mu}^{\nu_1,0}{}'(\nu_1)\right)}}{\pi\left\|M_{2m+1,n_\mu}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2}$$

$$A_{\nu_1,2m+1,n_\mu}^{\mu_0,Y-,X+} = \frac{2\int_0^{\mu_0} d\mu\,\mu \frac{J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n_\mu}^{\mu_0}\mu\right)\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}\int_0^{\pi} d\varphi\; f_{\nu_1,Y-,X+}(\mu,\varphi)Cos\left((2m+1)\varphi\right)}{\left(\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}\,\beta_{\nu_1}^{\nu} N_{2m+1,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu_1)-\alpha_{\nu_1}^{\nu} N_{2m+1,n_\mu}^{\nu_1,0}{}'(\nu_1)\right)}}{\pi\left\|M_{2m+1,n_\mu}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2}$$

$$A_{\nu_1,2m,n_\mu}^{\mu_0,Y-,X-} = \frac{2\int_0^{\mu_0} d\mu\,\mu \frac{J_{2m}\left(\lambda_{2m,n_\mu}^{\mu_0}\mu\right)\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}\int_0^{\pi} d\varphi\; f_{\nu_1,Y-,X-}(\mu,\varphi)Sin(2m\varphi)}{\left(\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}\,\beta_{\nu_1}^{\nu} N_{2m,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu_1)-\alpha_{\nu_1}^{\nu} N_{2m,n_\mu}^{\nu_1,0}{}'(\nu_1)\right)}}{\pi\left(1+\partial_{2m,0}\right)\left\|M_{2m,n_\mu}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2}$$

$$A_{\nu_2,2m,n_\mu}^{\mu_0,Y+,X+} = \frac{2\int_0^{\mu_0} d\mu\,\mu \frac{J_{2m}\left(\lambda_{2m,n_\mu}^{\mu_0}\mu\right)\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}\int_0^{\pi} d\varphi\; f_{\nu_2,Y+,X+}(\mu,\varphi)Cos(2m\varphi)}{\left(\alpha_{\nu_2}^{\nu} N_{2m,n_\mu}^{0,\nu_2}{}'(\nu_2)+\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}\,\beta_{\nu_2}^{\nu} N_{2m,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu_2)\right)}}{\pi\left(1+\partial_{2m,0}\right)\left\|M_{2m,n_\mu}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2}$$

$$A_{\nu_2,2m+1,n_\mu}^{\mu_0,Y+,X-} = \frac{2\int_0^{\mu_0} d\mu\,\mu \frac{J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n_\mu}^{\mu_0}\mu\right)\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}\int_0^{\pi} d\varphi\; f_{\nu_2,Y+,X-}(\mu,\varphi)Sin\left((2m+1)\varphi\right)}{\left(\alpha_{\nu_2}^{\nu} N_{2m+1,n_\mu}^{0,\nu_2}{}'(\nu_2)+\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}\,\beta_{\nu_2}^{\nu} N_{2m+1,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu_2)\right)}}{\pi\left\|M_{2m+1,n_\mu}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2}$$

$$A_{\nu_2,2m+1,n_\mu}^{\mu_0,Y-,X+} = \frac{2\int_0^{\mu_0} d\mu\,\mu \frac{J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n_\mu}^{\mu_0}\mu\right)\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}\int_0^{\pi} d\varphi\; f_{\nu_2,Y-,X+}(\mu,\varphi)Cos\left((2m+1)\varphi\right)}{\left(\alpha_{\nu_2}^{\nu} N_{2m+1,n_\mu}^{0,\nu_2}{}'(\nu_2)+\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}\,\beta_{\nu_2}^{\nu} N_{2m+1,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu_2)\right)}}{\pi\left\|M_{2m+1,n_\mu}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2}$$

$$A_{\nu_2,2m,n_\mu}^{\mu_0,Y-,X-} = \frac{2\int_0^{\mu_0} d\mu\,\mu \frac{J_{2m}\left(\lambda_{2m,n_\mu}^{\mu_0}\mu\right)\int_0^{\pi} d\varphi\; f_{\nu_2,Y-,X-}(\mu,\varphi)Sin(2m\varphi)}{\left(\alpha_{\nu_2}^{\nu} N_{2m,n_\mu}^{0,\nu_2}{}'(\nu_2)+\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}\,\beta_{\nu_2}^{\nu} N_{2m,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu_2)\right)}}{\pi\left(1+\partial_{2m,0}\right)\left\|M_{2m,n_\mu}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2}$$

Les 4 intégrales dérivant des conditions inhomogènes en μ_0, et de la symétrie azimutale du problème homogène en ν:

$$A_{\mu_0,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X+}=\frac{2\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\nu\frac{N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\sqrt{\nu^2+\mu_0^2}\int_0^\pi d\varphi\, f_{\mu_0,Y+,X+}(\nu,\varphi)Cos(2m\varphi)}{\left(\sqrt{\nu^2+\mu_0^2}\,\beta_{\mu_0}^{\mu}M_{2m,n_\nu}^{\mu_0}(\mu_0)+\alpha_{\mu_0}^{\mu}M_{2m,n_\nu}^{\mu_0}{}'(\mu_0)\right)}}{\pi\left(1+\partial_{2m,0}\right)\left\|N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2}$$

$$A_{\mu_0,2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X-}=\frac{2\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\nu\frac{N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\sqrt{\nu^2+\mu_0^2}\int_0^\pi d\varphi\, f_{\mu_0,Y+,X-}(\nu,\varphi)Sin\left((2m+1)\varphi\right)}{\left(\sqrt{\nu^2+\mu_0^2}\,\beta_{\mu_0}^{\mu}M_{2m+1,n_\nu}^{\mu_0}(\mu_0)+\alpha_{\mu_0}^{\mu}M_{2m+1,n_\nu}^{\mu_0}{}'(\mu_0)\right)}}{\pi\left\|N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2}$$

$$A_{\mu_0,2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y-,X+}=\frac{2\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\nu\frac{N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\sqrt{\nu^2+\mu_0^2}\int_0^\pi d\varphi\, f_{\mu_0,Y-,X+}(\nu,\varphi)Cos\left((2m+1)\varphi\right)}{\left(\sqrt{\nu^2+\mu_2^2}\,\beta_{\mu_0}^{\mu}M_{2m+1,n_\nu}^{\mu_0}(\mu_0)+\alpha_{\mu_0}^{\mu}M_{2m+1,n_\nu}^{\mu_0}{}'(\mu_0)\right)}}{\pi\left\|N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2}$$

$$A_{\mu_0,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y-,X-}=\frac{2\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\nu\frac{N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\sqrt{\nu^2+\mu_0^2}\int_0^\pi d\varphi\, f_{\mu_0,Y-,X-}(\nu,\varphi)Sin(2m\varphi)}{\left(\sqrt{\nu^2+\mu_2^2}\,\beta_{\mu_0}^{\mu}M_{2m,n_\nu}^{\mu_0}(\mu_0)+\alpha_{\mu_0}^{\mu}M_{2m,n_\nu}^{\mu_0}{}'(\mu_0)\right)}}{\pi\left\|N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2}$$

Donne une solution générale du problème de la forme :

$$
\begin{aligned}
&T(\mu,\nu,\varphi)= \\
&\left.\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty} A_{\nu_1,2m,n_\mu}^{\mu_0,Y+,X+} J_{2m}\left(\lambda_{2m,n_\mu}^{\mu_0}\ \mu\right) N_{2m,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu) Cos(2m\varphi)+ \\
&\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty} A_{\nu_1,2m+1,n_\mu}^{\mu_0,Y+,X-} J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n_\mu}^{\mu_0}\ \mu\right) N_{2m+1,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu) Sin((2m+1)\varphi)+ \\
&+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty} A_{\nu_1,2m+1,n_\mu}^{\mu_0,Y-,X+} J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n_\mu}^{\mu_0}\ \mu\right) N_{2m+1,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu) Cos((2m+1)\varphi)+ \\
&\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty} A_{\nu_1,2m,n_\mu}^{\mu_0,Y-,X-} J_{2m}\left(\lambda_{2m,n_\mu}^{\mu_0}\ \mu\right) N_{2m,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu) Sin(2m\varphi)+ \\
&+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty} A_{\nu_2,2m,n_\mu}^{\mu_0,Y+,X+} J_{2m}\left(\lambda_{2m,n_\mu}^{\mu_0}\ \mu\right) N_{2m,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu) Cos(2m\varphi)+ \\
&\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty} A_{\nu_2,2m+1,n_\mu}^{\mu_0,Y+,X-} J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n_\mu}^{\mu_0}\ \mu\right) N_{2m+1,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu) Sin((2m+1)\varphi)+ \\
&+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty} A_{\nu_2,2m+1,n_\mu}^{\mu_0,Y-,X+} J_{2m+1}\left(\lambda_{2m+1,n_\mu}^{\mu_0}\ \mu\right) N_{2m+1,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu) Cos((2m+1)\varphi)+ \\
&\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty} A_{\nu_2,2m,n_\mu}^{\mu_0,Y-,X-} J_{2m}\left(\lambda_{2m,n_\mu}^{\mu_0}\ \mu\right) N_{2m,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu) Sin(2m\varphi)+
\end{aligned}\right\}\ homogène\ \mu \\
&\left.\begin{aligned}
&+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty} A_{\mu_0,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X+} M_{2m,n_\nu}^{\mu_0}(\mu) N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu) Cos(2m\varphi)+ \\
&\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty} A_{\mu_0,2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X-} M_{2m+1,n_\nu}^{\mu_0}(\mu) N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu) Sin((2m+1)\varphi)+ \\
&+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty} A_{\mu_0,2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y-,X+} M_{2m+1,n_\nu}^{\mu_0}(\mu) N_{2m+1,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu) Cos((2m+1)\varphi)+ \\
&\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty} A_{\mu_0,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y-,X-} M_{2m,n_\nu}^{\mu_0}(\mu) N_{2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu) Sin(2m\varphi)
\end{aligned}\right\}\ homogène\ \nu
\end{aligned}
$$

Prise en compte de la valeur propre nulle

Lorsque la fonction propre azimutale est de valeur propre nulle, soit une constante, alors les solutions en μ et ν sont des fonctions de Bessel et Bessel modifiées d'ordre zéro. Elles ne changent pas de nature fondamentalement et elles sont aussi prises en considération dans la sommation de la série. Le seul cas où la solution de valeur propre nulle change de nature est lorsque

$$m = 0 \quad et \quad \lambda_{0,n}^{\mu_0} = 0 \quad \text{problème homogène en } \mu$$

$$m = 0 \quad et \quad \lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2} = 0 \quad \text{problème homogène en } \nu$$

Et dans ce cas nous savons vu que les fonctions solutions sont de la forme A+BLog(μ) et C+DLog(ν). La forme qui s'impose en respectant les conditions aux limites homogène en μ (resp. ν) est constante en (μ resp.ν). Dans ce cas les conditions aux limites homogènes en μ (resp. ν) sont de Neumann de part et d'autres. Il vient par la prise en compte des conditions aux limites inhomogènes :

$$\begin{cases} \text{Problème homogène en } \mu \quad \alpha_{\mu_0}^{\mu} = 1 \quad et \quad \beta_{\mu_0}^{\mu} = 0 \\ A_0^{\nu_2} = \dfrac{\nu_2 \displaystyle\int_0^{\mu_0} d\mu \frac{\mu\sqrt{\mu^2+\nu_2^2}}{\left(\alpha_{\nu_2}^{\nu}\beta_{\nu_1}^{\nu}\nu_1 + \beta_{\nu_2}^{\nu}\nu_2\sqrt{\mu^2+\nu_2^2}\left(\alpha_{\nu_1}^{\nu} + \nu_1\beta_{\nu_1}^{\nu} Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)\right)\right)} \displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi\, f_{\nu_2}(\mu,\varphi)}{\pi\mu_0^2} \\ A_0^{\nu_1} = \dfrac{\nu_1 \displaystyle\int_0^{\mu_0} d\mu \frac{\mu\sqrt{\mu^2+\nu_1^2}}{\left(\alpha_{\nu_1}^{\nu}\beta_{\nu_2}^{\nu}\nu_2 + \nu_1\beta_{\nu_1}^{\nu}\sqrt{\mu^2+\nu_1^2}\left(\alpha_{\nu_2}^{\nu} + \nu_2\beta_{\nu_2}^{\nu} Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)\right)\right)} \displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi\, f_{\nu 1}(\mu,\varphi)}{\pi\mu_0^2} \\ Si \quad \beta_{\nu_1}^{\nu} = \beta_{\nu_2}^{\nu} = 0 \quad A_0^{\nu_1} \quad et \quad A_0^{\nu_2} \quad \text{sont des constantes quelconques} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Problème homogène en } \nu \quad \alpha_{\nu_1}^{\nu} = \alpha_{\nu_2}^{\nu} = 1 \quad et \quad \beta_{\nu_1}^{\nu} = \beta_{\nu_2}^{\nu} = 0 \\ A_0^{\mu_0} = \dfrac{\displaystyle\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\, \nu \int_0^{2\pi} d\varphi\, f_{\mu_2}(\nu,\varphi)}{\pi\left(\nu_2^2 - \nu_1^2\right)\beta_{\mu_0}^{\mu}} \\ Si \quad \beta_{\mu_0}^{\mu} = 0 \quad A_0^{\mu_0} \quad \text{est une constante quelconque puisque} \end{cases}$$

Le jeu de fonctions propres est le suivant pour les deux problèmes homogènes en μ ou en ν :

$$\begin{cases} Problème\ homogène\ en\ \mu \quad \alpha^{\mu}_{\mu_0}=1 \quad et \quad \beta^{\mu}_{\mu_0}=0 \\ M^{\mu_0}_{m,n}(\mu)=J_m\left(\lambda^{\mu_0}_{m,n}\ \mu\right) \quad \lambda^{\mu_0}_{m,n} \quad tq \quad J_m'\left(\lambda^{\mu_0}_{m,n}\mu_0\right)=0 \qquad \left\|M^{\mu_0}_{m,n}(\mu)\right\|^2=\dfrac{\mu_0{}^2\left(J_m\left(\lambda^{\mu_0}_{m,n}\ \mu\right)\right)^2\left(1-\dfrac{m^2}{\mu_0{}^2\left(\lambda^{\mu_0}_{m,n}\right)^2}\right)}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Problème\ homogène\ en\ \nu \quad \alpha^{\nu}_{\nu_1}=\alpha^{\nu}_{\nu_2}=1 \quad et \quad \beta^{\nu}_{\nu_1}=\beta^{\nu}_{\nu_2}=0 \\ N^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}(\nu)=\dfrac{J_m\left(\lambda^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}\ \nu\right)}{J_m'\left(\lambda^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}\nu_1\right)}-\dfrac{Y_m\left(\lambda^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}\ \nu\right)}{Y_m'\left(\lambda^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}\nu_1\right)} \quad \lambda^{\nu_1,\nu_2}_{m,n} \quad tq \quad \dfrac{J_m'\left(\lambda^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}\nu_1\right)}{J_m'\left(\lambda^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}\nu_2\right)}=\dfrac{Y_m'\left(\lambda^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}\nu_1\right)}{Y_m'\left(\lambda^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}\nu_2\right)} \\ N^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}(\nu_1)=\dfrac{J_m\left(\lambda^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}\ \nu_1\right)}{J_m'\left(\lambda^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}\nu_1\right)}-\dfrac{Y_m\left(\lambda^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}\ \nu_1\right)}{Y_m'\left(\lambda^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}\nu_1\right)} \quad N^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}(\nu_2)=\dfrac{J_m\left(\lambda^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}\ \nu_2\right)}{J_m'\left(\lambda^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}\nu_1\right)}-\dfrac{Y_m\left(\lambda^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}\ \nu_2\right)}{Y_m'\left(\lambda^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}\nu_1\right)} \\ \left\|N^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}(\nu)\right\|^2=\dfrac{\nu_2{}^2\left(N^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}(\nu_2)\right)^2\left(1-\dfrac{m^2}{\nu_2{}^2\left(\lambda^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}\right)^2}\right)-\nu_1{}^2\left(N^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}(\nu_1)\right)^2\left(1-\dfrac{m^2}{\nu_1{}^2\left(\lambda^{\nu_1,\nu_2}_{m,n}\right)^2}\right)}{2} \end{cases}$$

Soit la solution complète pour le problème homogène en μ :

$$T_{\mu_0}(\mu,\nu,\varphi)=A_0^{\nu_1}\left(\alpha^{\nu}_{\nu_2}+\nu_2\beta^{\nu}_{\nu 2}Log\left(\frac{\nu_2}{\nu}\right)\right)+A_0^{\nu_2}\left(\alpha^{\nu}_{\nu_1}+\nu_1\beta^{\nu}_{\nu_1}Log\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)\right)+$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}A^{\mu_0,Y+,X+}_{\nu_1,2m,n_\mu}J_{2m}\left(\lambda^{\mu_0}_{2m,n_\mu}\ \mu\right)N^{\nu_1,0}_{2m,n_\mu}(\nu)Cos(2m\varphi)+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}A^{\mu_0,Y+,X-}_{\nu_1,2m+1,n_\mu}J_{2m+1}\left(\lambda^{\mu_0}_{2m+1,n_\mu}\ \mu\right)N^{\nu_1,0}_{2m+1,n_\mu}(\nu)Sin((2m+1)\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}A^{\mu_0,Y-,X+}_{\nu_1,2m+1,n_\mu}J_{2m+1}\left(\lambda^{\mu_0}_{2m+1,n_\mu}\ \mu\right)N^{\nu_1,0}_{2m+1,n_\mu}(\nu)Cos((2m+1)\varphi)+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}A^{\mu_0,Y-,X-}_{\nu_1,2m,n_\mu}J_{2m}\left(\lambda^{\mu_0}_{2m,n_\mu}\ \mu\right)N^{\nu_1,0}_{2m,n_\mu}(\nu)Sin(2m\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}A^{\mu_0,Y+,X+}_{\nu_2,2m,n_\mu}M^{\mu_1,\mu_2}_{2m,n_\mu}(\mu)N^{0,\nu_2}_{2m,n_\mu}(\nu)Cos(2m\varphi)+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}A^{\mu_0,Y+,X-}_{\nu_2,2m+1,n_\mu}J_{2m+1}\left(\lambda^{\mu_0}_{2m+1,n_\mu}\ \mu\right)N^{0,\nu_2}_{2m+1,n_\mu}(\nu)Sin((2m+1)\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}A^{\mu_0,Y-,X+}_{\nu_2,2m+1,n_\mu}J_{2m+1}\left(\lambda^{\mu_0}_{2m+1,n_\mu}\ \mu\right)N^{0,\nu_2}_{2m+1,n_\mu}(\nu)Cos((2m+1)\varphi)+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}A^{\mu_0,Y-,X-}_{\nu_2,2m,n_\mu}J_{2m}\left(\lambda^{\mu_0}_{2m,n_\mu}\ \mu\right)N^{0,\nu_2}_{2m,n_\mu}(\nu)Sin(2m\varphi)+$$

Et la solution complète pour le problème homogène en ν :

$$T_{\nu_1,\nu_2}(\mu,\nu,\varphi)=A_0^{\mu 0}\left(\alpha^{\mu}_{\mu_2}+\mu_2\beta^{\mu}_{\mu 2}Log\left(\frac{\mu_2}{\mu}\right)\right)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty}A^{\nu_1,\nu_2,Y+,X+}_{\mu_0,2m,n_\nu}M^{\mu_0}_{2m,n_\nu}(\mu)N^{\nu_1,\nu_2}_{2m,n_\nu}(\nu)Cos(2m\varphi)+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty}A^{\nu_1,\nu_2,Y+,X-}_{\mu_0,2m+1,n_\nu}M^{\mu_0}_{2m+1,n_\nu}(\mu)N^{\nu_1,\nu_2}_{2m+1,n_\nu}(\nu)Sin((2m+1)\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty}A^{\nu_1,\nu_2,Y-,X+}_{\mu_0,2m+1,n_\nu}M^{\mu_0}_{2m+1,n_\nu}(\mu)N^{\nu_1,\nu_2}_{2m+1,n_\nu}(\nu)Cos((2m+1)\varphi)+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty}A^{\nu_1,\nu_2,Y-,X-}_{\mu_0,2m,n_\nu}M^{\mu_0}_{2m,n_\nu}(\mu)N^{\nu_1,\nu_2}_{2m,n_\nu}(\nu)Sin(2m\varphi)$$

Pour fixer les idées et simplifier un peu les expressions on va considérer le cas du problème de Dirichlet où toutes les fonctions limites sont constantes mais de valeurs distinctes :

$$f_{\nu_1}(\mu,\varphi)=T_{\nu_1} \quad f_{\nu_2}(\mu,\varphi)=T_{\nu_2} \quad f_{\mu_0}(\nu,\varphi)=T_{\mu_0}$$

La simplification consiste donc à ne retenir dans tous les problèmes que les termes de symétrie Y+X+ et dans ces derniers que le terme m=0, de sorte que la solution ne dépende plus de l'azimut φ. Il vient pour les fonctions propres et fonction de l'autre variable :

$$\begin{cases} M_{0,n}^{\mu_0}(\mu)=J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\,\mu\right) \quad \lambda_{0,n}^{\mu_0} \;\; tq \;\; J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\mu_0\right)=0 \quad \left\|M_{0,n}^{\mu_1,\mu_2}(\mu)\right\|^2=\dfrac{\mu_0{}^2\left(J_0{}'\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\,\mu_0\right)\right)^2}{2}=\dfrac{\mu_0{}^2\left(J_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\,\mu_0\right)\right)^2}{2} \\ N_{0,n}^{\nu_1,0}(\nu)=\dfrac{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\,\nu\right)}{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_2\right)}-\dfrac{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\,\nu\right)}{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_2\right)} \quad N_{0,n}^{0,\nu_2}(\nu)=\dfrac{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\,\nu\right)}{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_1\right)}-\dfrac{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\,\nu\right)}{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_1\right)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)=\dfrac{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\dfrac{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} \quad \lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2} \;\; tq \;\; \dfrac{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}=\dfrac{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)} \\ D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)=\dfrac{J_1\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\dfrac{Y_1\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} \quad D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)=\dfrac{J_1\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_2\right)}{J_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\dfrac{Y_1\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_2\right)}{Y_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} \\ \left\|N_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2=\dfrac{\nu_2{}^2\left(D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)\right)^2-\nu_1{}^2\left(D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)^2}{2}=\dfrac{\left(\nu_2 D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)+\nu_1 D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)\left(\nu_2 D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)-\nu_1 D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)}{2} \\ M_{0,n}^{0,\mu_0}(\mu)=\dfrac{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu\right)}{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu_0\right)} \end{cases}$$

Dans ce cas on peut calculer les intégrales des fonctions de Bessel :

$$\int_0^{\mu_0} d\mu\,\mu\, M_{0,n_\mu}^{\mu_0}(\mu)=\int_0^{\mu_0} d\mu\,\mu\, J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\,\mu\right)=\frac{\mu_0 J_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\,\mu_0\right)}{\lambda_{0,n}^{\mu_0}}$$

$$De\ m\hat{e}me \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\,\nu\, N_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)=\frac{\nu_2 D_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)-\nu_1 D_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)}{\lambda_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}}.$$

Ce qui donne pour les trois intégrales restantes du développement en série :

$$A_{\nu_1,0,n_\mu}^{\mu_0,Y+,X+}=\frac{2T_{\nu_1}}{\lambda_{0,n}^{\mu_0}\mu_0 J_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\,\mu_0\right)N_{0,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu_1)} \quad A_{\nu_2,0,n_\mu}^{\mu_0,Y+,X+}=\frac{2T_{\nu_2}}{\lambda_{0,n}^{\mu_0}\mu_0 J_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\,\mu_0\right)N_{0,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu_2)}$$

$$M_{0,n_\nu}^{\mu_0}(\mu_0)=1 \Rightarrow A_{\mu_0,2m,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2,Y+,X+}=\frac{2T_{\mu_0}}{\left(\nu_2 D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)+\nu_1 D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)\lambda_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}}$$

Soit une solution de la forme :

$$T(\mu,\nu,\varphi)=2\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}\frac{J_0\left(\lambda_{0,n_\mu}^{\mu_0}\,\mu\right)}{\lambda_{0,n}^{\mu_0}\mu_0 J_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\,\mu_0\right)}\left\{T_{\nu_1}\frac{N_{0,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu)}{N_{0,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu_1)}+T_{\nu_2}\frac{N_{0,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu)}{N_{0,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu_2)}\right\}+\Big\} \quad partie\ homog\grave{e}ne\ \mu$$

$$+2\sum_{n_\nu=1}^{+\infty}\frac{T_{\mu_0}}{\lambda_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}\left(\nu_2 D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)+\nu_1 D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)}\frac{I_0\left(\lambda_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu\right)}{I_0\left(\lambda_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}\,\mu_0\right)}N_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\Big\} \quad partie\ homog\grave{e}ne\ \nu$$

Lorsque $T_{\nu_1} = T_{\nu_2} \neq T_{\mu_0}$*, alors la solution peut s'écrire :*

$$N_{0,n}^{\nu_1,0}(\nu) = \frac{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu\right)K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_2\right) - K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu\right)I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_2\right)}{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_2\right)K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_2\right)} \quad N_{0,n}^{0,\nu_2}(\nu) = \frac{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu\right)K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_1\right) - K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu\right)I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_1\right)}{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_1\right)K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_1\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{N_{0,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu)}{N_{0,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu_1)} + \frac{N_{0,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu)}{N_{0,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu_2)} = \frac{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu\right)\left\{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_2\right) - K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_1\right)\right\} - K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu\right)\left\{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_2\right) - I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_1\right)\right\}}{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_1\right)K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_2\right) - K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_1\right)I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_2\right)}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi) = 2T_{\nu_1}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}\frac{J_0\left(\lambda_{0,n_\mu}^{\mu_0}\mu\right)}{\lambda_{0,n}^{\mu_0}\mu_0 J_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\mu_0\right)}\frac{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu\right)\left\{K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_2\right) - K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_1\right)\right\} - K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu\right)\left\{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_2\right) - I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_1\right)\right\}}{I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_1\right)K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_2\right) - K_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_1\right)I_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\nu_2\right)} +$$

$$+ 2T_{\mu_0}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty}\frac{N_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}(\nu)}{\lambda_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}\left(\nu_2 D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2) + \nu_1 D_{0,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)}\frac{I_0\left(\lambda_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)}{I_0\left(\lambda_{0,n_\nu}^{\nu_1,\nu_2}\mu_0\right)}$$

<u>Illustrons maintenant une solution avec une valeur propre nulle pour le problème homogène en µ de Neumann, homogène de Dirichlet en ν=ν1, et inhomogène de Dirichlet ν2 à valeur constante</u>

Prenons un autre exemple simple pour le problème homogène en µ, avec un flux constant sur la surface ν=ν2 et une valeur fixe nulle sur ν=ν1, on a :

$$\alpha_{\mu_0}^{\mu} = 1 \quad et \quad \beta_{\mu_0}^{\mu} = 0$$
$$\alpha_{\nu_1}^{\nu} = 0 \quad \beta_{\nu_1}^{\nu} = 1 \quad f_{\nu_1}(\mu,\varphi) = 0$$
$$\alpha_{\nu_2}^{\nu} = 0 \quad \beta_{\nu_2}^{\nu} = 1 \quad f_{\nu_2}(\mu,\varphi) = T_{\nu_2} \Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_2} = T_{\nu_2}$$

$$\Rightarrow A_0^{\nu_1} = 0 \quad A_0^{\nu_2} = \frac{2T_{\nu_2}\int_0^{\mu_0} d\mu\,\mu}{\nu_1\mu_0{}^2 Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)} = \frac{T_{\nu_2}}{\nu_1 Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)} \quad Terme\ de\ valeur\ propre\ nulle = A_0^{\nu_2}\nu_1 Log\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right) = T_{\nu_2}\frac{Log\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)}{Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)}$$

Dans le développement en série pour ce même problème, seul subsiste effectivement le terme de valeur propre nulle :

$$M_{0,n}^{\mu_0}(\mu) = J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\mu\right) \quad \lambda_{0,n}^{\mu_0} \quad tq \quad J_1\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\mu_1\right) = 0 \qquad \left\|M_{0,n}^{\mu_0}(\mu)\right\|^2 = \frac{\mu_0{}^2\left(J_0\left(\lambda_{0,n}^{\mu_0}\mu\right)\right)^2}{2}$$

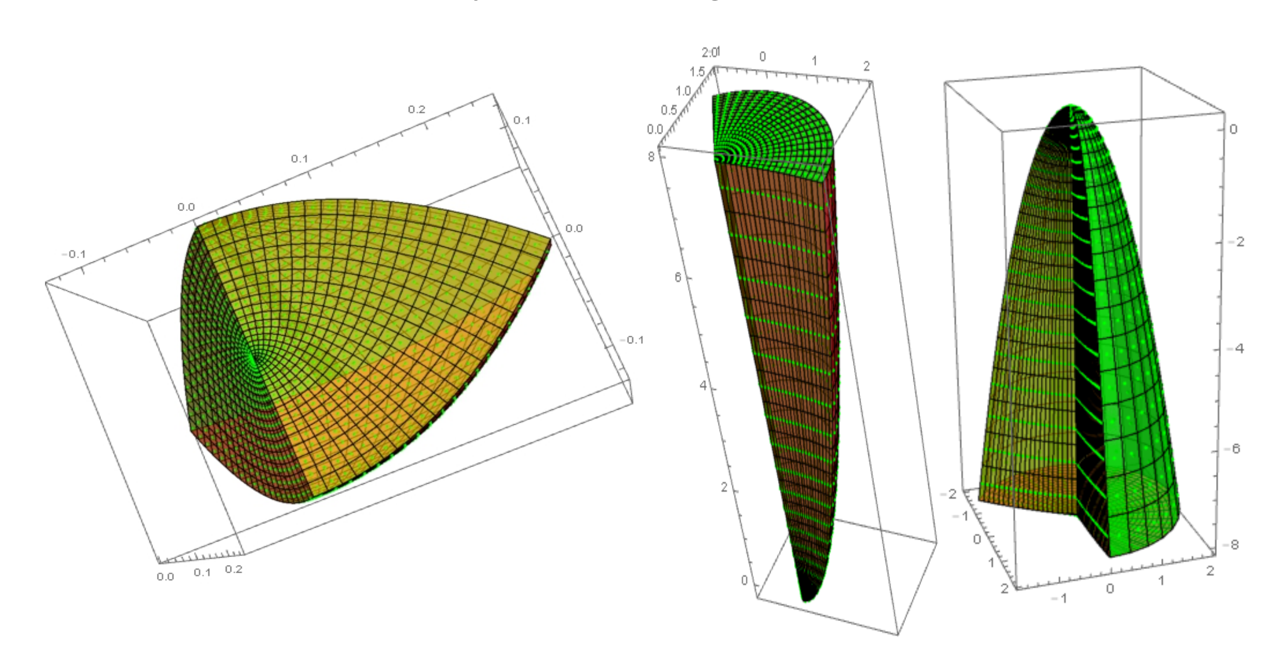
$$\Rightarrow A_{\nu_2,0,n_\mu}^{\mu_0} \propto 2T_{\nu_2}\int_0^{\mu_0} d\mu\,\mu\,J_0\left(\lambda_{0,n_\mu}^{\mu_0}\mu\right) \propto \left[\mu J_1\left(\lambda_{0,n_\mu}^{\mu_0}\mu\right)\right]_0^{\mu_0} = 0 \Rightarrow T_{\mu_0}(\mu,\nu) = T_{\nu_2}\frac{Log\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)}{Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)}$$

Si l'on a le problème suivant, avec deux températures distinctes, on trouve immédiatement :

$$\alpha_{\mu_0}^{\mu} = 1 \quad et \quad \beta_{\mu_0}^{\mu} = 0$$
$$\alpha_{\nu_2}^{\nu} = 0 \quad \beta_{\nu_2}^{\nu} = 1 \quad f_{\nu_1}(\mu,\varphi) = T_{\nu_1} \Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_1} = T_{\nu_1} \quad f_{\nu_2}(\mu,\varphi) = T_{\nu_2} \Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_2} = T_{\nu_2}$$

$$T(\mu,\nu) = T_{\nu_1}\frac{Log\left(\frac{\nu_2}{\nu}\right)}{Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)} + T_{\nu_2}\frac{Log\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)}{Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)}$$

Secteur de paraboloïde plein de révolution soumis à des conditions aux limites dépendantes ou indépendantes de l'angle azimutal



Le problème intérieur aux limites le plus général de l'équation de Laplace se présente comme suit :

$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}\right)+\frac{1}{\mu^2\nu^2}\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

$$(\mu,\nu,\varphi)\in\Omega=[0,\mu_0]\times[0,\nu_0]\times[0,\varphi_0] \quad T(\mu,\nu,\varphi)\ \textit{fini}$$

$$\textit{Cas envisagés}: \textit{Dirichlet ou Neumann} \Rightarrow \alpha^{\mu}_{\mu_0},\beta^{\mu}_{\mu_0},\alpha^{\nu}_{\nu_0},\beta^{\nu}_{\nu_0},\alpha^{\varphi}_{0},\beta^{\varphi}_{0},\alpha^{\varphi}_{\varphi_0},\beta^{\varphi}_{\varphi_0}\in\{0,1\}$$

$$\textit{Et} \quad \alpha^{\mu}_{\mu_0}=1-\beta^{\mu}_{\mu_0} \quad \alpha^{\nu}_{\nu_0}=1-\beta^{\nu}_{\nu_0} \quad \alpha^{\mu}_{\mu_0}=1-\beta^{\mu}_{\mu_0} \quad \alpha^{\varphi}_{0}=1-\beta^{\varphi}_{0} \quad \alpha^{\varphi}_{\varphi_0}=1-\beta^{\varphi}_{\varphi_0}$$

$$C.L. \quad \left.\frac{\alpha^{\mu}_{\mu_0}}{\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta^{\mu}_{\mu_0}\,T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\mu=\mu_0}=f^{\mu}_{\mu_0}(\nu,\varphi)$$

$$\left.\frac{\alpha^{\nu}_{\nu_0}}{\sqrt{\mu^2+{\nu_0}^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta^{\nu}_{\nu_0}\,T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_0}=f^{\nu}_{\nu_0}(\mu,\varphi)$$

$$\left.\frac{\alpha^{\varphi}_{0}}{\mu\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta^{\varphi}_{0}\,T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\varphi=0}=-f^{\varphi}_{0}(\mu,\nu) \qquad \left.\frac{\alpha^{\varphi}_{\varphi_0}}{\mu\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta^{\varphi}_{\varphi_0}\,T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\varphi=\varphi_0}=f^{\varphi}_{\varphi_0}(\mu,\nu)$$

Que l'on peut scinder en trois types de problèmes :
- le problème inhomogène en μ, homogène dans les deux autres dimensions
- le problème inhomogène en ν, homogène dans les deux autres dimensions
- le problème inhomogène en φ, homogène dans les deux autres dimensions

On utilisera la simplification des coefficients des conditions aux limites homogènes puisque l'on envisage uniquement des conditions de Dirichlet ou de Neumann.

Le problème inhomogène en μ sur le secteur de paraboloïde plein de révolution

Il s'agit du problème suivant :

$$\alpha_{\mu_0}^{\mu},\beta_{\mu_0}^{\mu},\alpha_{\nu_0}^{\nu},\beta_{\nu_0}^{\nu},\alpha_0^{\varphi},\beta_0^{\varphi},\alpha_{\varphi_0}^{\varphi},\beta_{\varphi_0}^{\varphi}\in\{0,1\}$$

$$Et\quad \alpha_{\mu_0}^{\mu}=1-\beta_{\mu_0}^{\mu}\quad \alpha_{\nu_0}^{\nu}=1-\beta_{\nu_0}^{\nu}\quad \alpha_{\mu_0}^{\mu}=1-\beta_{\mu_0}^{\mu}\quad \alpha_0^{\varphi}=1-\beta_0^{\varphi}\quad \alpha_{\varphi_0}^{\varphi}=1-\beta_{\varphi_0}^{\varphi}$$

$$C.L.\quad \frac{\alpha_{\mu_0}^{\mu}}{\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta_{\mu_0}^{\mu}\,T(\mu,\nu,\varphi)\Bigg|_{\mu=\mu_0}=f_{\mu_0}^{\mu}(\nu,\varphi)$$

$$\alpha_{\nu_0}^{\nu}\,\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta_{\nu_0}^{\nu}\,T(\mu,\nu,\varphi)\Bigg|_{\nu=\nu_0}=0$$

$$\alpha_0^{\varphi}\,\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta_0^{\varphi}\,T(\mu,\nu,\varphi)\Bigg|_{\varphi=0}=0\quad \alpha_{\varphi_0}^{\varphi}\,\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta_{\varphi_0}^{\varphi}\,T(\mu,\nu,\varphi)\Bigg|_{\varphi=\varphi_0}=0$$

Si l'on commence par les fonctions azimutales sur un secteur d'angle ϕ0, elles ont la forme connue et déjà calculée dans d'autres configurations géométriques (le cylindre par exemple) :

$$\Phi_{n_\varphi}(\varphi)=\alpha_0^{\varphi}\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\,Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi\right)+\beta_0^{\varphi}\,Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi\right)$$

$$\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\ \ valeurs\ propres\ \ solution\ de\quad Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\left(\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\right)^2\alpha_0^{\varphi}\alpha_{\varphi_0}^{\varphi}-\beta_0^{\varphi}\beta_{\varphi_0}^{\varphi}\right)=\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\,Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\left(\beta_{\varphi_0}^{\varphi}\alpha_0^{\varphi}+\beta_0^{\varphi}\alpha_{\varphi_0}^{\varphi}\right)$$

$$\left\|\Phi_{n_\varphi}(\varphi)\right\|^2=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\theta_0\left(\left(\alpha_0^{\varphi}\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)+\beta_0^{\varphi}Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\right)^2+\left(\alpha_0^{\varphi}\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)-\beta_0^{\varphi}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\right)^2\right)\\+\frac{1}{\lambda_{n_\theta}^{\theta}}\left(\alpha_0^{\varphi}\lambda_{n_\theta}^{\theta}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)+\beta_0^{\varphi}Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\right)\left(\alpha_0^{\varphi}\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)-\beta_0^{\varphi}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\right)+\alpha_0^{\varphi}\beta_0^{\varphi}\end{array}\right]$$

D'après tous les calculs déjà réalisés, les fonctions propres en ν, intégrales et solutions sont les suivantes :

$$N_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}(\nu)=J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\nu\right)\quad M_{n_\varphi,n_\nu}^{\mu_0}(\mu)=I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\mu\right)$$

$$N_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,'(\nu)=\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\,'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\nu\right)=\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}-1}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\nu\right)-\frac{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\nu\right)$$

$$\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\quad tq\quad \alpha_{\nu_0}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\,'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\nu\right)+\beta_{\nu_0}^{\nu}\,J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\nu_0\right)=0$$

$$\left\|N_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}(\nu)\right\|^2=\frac{{\nu_0}^2\left(\left(J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\,'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\nu_0\right)\right)^2+\left(J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\,(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\nu_0)\right)^2\left(1-\frac{\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\right)^2}{\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\right)^2{\nu_0}^2}\right)\right)}{2}$$

$$M_{n_\varphi,n_\nu}^{\mu_0}(\mu)=I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\mu\right)\Rightarrow M_{n_\varphi,n_\nu}^{\mu_0}\,'(\mu_0)=\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\,'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\mu_0\right)=\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}-1}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\mu_0\right)-\frac{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{\mu_0}I_m\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\mu_0\right)$$

$$A_{n_\varphi,n_\nu}^{\mu_0}=\frac{\displaystyle\int_0^{\nu_0}d\nu\,\nu\,\frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\nu\right)\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}\displaystyle\int_0^{\varphi_0}d\varphi\ f_{\mu_0}^{\mu}(\nu,\varphi)\Phi_{n_\varphi}(\varphi)}{\left(\alpha_{\mu_0}^{\mu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\,'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\mu_0\right)+\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}\,\beta_{\mu_0}^{\mu}\,I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\mu_0\right)\right)}}{\left\|N_{m,n}^{\nu_0}(\nu)\right\|^2\left\|\Phi_{n_\varphi}(\varphi)\right\|^2}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{n_\varphi=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty}A_{n_\varphi,n_\nu}^{\mu_0}\,I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\mu\right)J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\nu\right)\Phi_{n_\varphi}(\varphi)$$

Le problème inhomogène en ν sur le secteur de paraboloïde plein de révolution

Il s'agit du problème suivant :

$$\alpha_{\mu_0}^{\mu}, \beta_{\mu_0}^{\mu}, \alpha_{\nu_0}^{\nu}, \beta_{\nu_0}^{\nu}, \alpha_0^{\varphi}, \beta_0^{\varphi}, \alpha_{\varphi_0}^{\varphi}, \beta_{\varphi_0}^{\varphi} \in \{0,1\}$$

$$Et \quad \alpha_{\mu_0}^{\mu} = 1-\beta_{\mu_0}^{\mu} \quad \alpha_{\nu_0}^{\nu} = 1-\beta_{\nu_0}^{\nu} \quad \alpha_{\mu_0}^{\mu} = 1-\beta_{\mu_0}^{\mu} \quad \alpha_0^{\varphi} = 1-\beta_0^{\varphi} \quad \alpha_{\varphi_0}^{\varphi} = 1-\beta_{\varphi_0}^{\varphi}$$

$$C.L. \quad \alpha_{\mu_0}^{\mu} \frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu} + \beta_{\mu_0}^{\mu} T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\mu=\mu_0} = 0 \quad \alpha_{\nu_0}^{\nu} \frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu} + \beta_{\nu_0}^{\nu} T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\nu=\nu_0} = f_{\nu_0}^{\nu}(\mu,\varphi)$$

$$\alpha_0^{\varphi} \frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu} - \beta_0^{\varphi} T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\varphi=0} = 0 \quad \alpha_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu} + \beta_{\varphi_0}^{\varphi} T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

La solution est facile à calculer par permutation des expressions en μ et ν , il vient alors :

$$\Phi_{n_\varphi}(\varphi) = \alpha_0^{\varphi} \lambda_{n_\varphi}^{\varphi} Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi} \varphi\right) + \beta_0^{\varphi} Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi} \varphi\right)$$

$$\lambda_{n_\varphi}^{\varphi} \text{ valeurs propres solution de } \quad Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi} \varphi_0\right)\left(\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\right)^2 \alpha_0^{\varphi} \alpha_{\varphi_0}^{\varphi} - \beta_0^{\varphi} \beta_{\varphi_0}^{\varphi}\right) = \lambda_{n_\varphi}^{\varphi} Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi} \varphi_0\right)\left(\beta_{\varphi_0}^{\varphi} \alpha_0^{\varphi} + \beta_0^{\varphi} \alpha_{\varphi_0}^{\varphi}\right)$$

$$\left\|\Phi_{n_\varphi}(\varphi)\right\|^2 = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} \theta_0\left(\left(\alpha_0^{\varphi} \lambda_{n_\varphi}^{\varphi} Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi} \varphi_0\right) + \beta_0^{\varphi} Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi} \varphi_0\right)\right)^2 + \left(\alpha_0^{\varphi} \lambda_{n_\varphi}^{\varphi} Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi} \varphi_0\right) - \beta_0^{\varphi} Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi} \varphi_0\right)\right)^2\right) \\ + \frac{1}{\lambda_{n_\theta}^{\theta}}\left(\alpha_0^{\varphi} \lambda_{n_\theta}^{\theta} Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi} \varphi_0\right) + \beta_0^{\varphi} Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi} \varphi_0\right)\right)\left(\alpha_0^{\varphi} \lambda_{n_\varphi}^{\varphi} Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi} \varphi_0\right) - \beta_0^{\varphi} Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi} \varphi_0\right)\right) + \alpha_0^{\varphi} \beta_0^{\varphi} \end{array}\right]$$

$$M_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\mu) = J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} \mu\right) \quad N_{n_\varphi,n_\mu}^{\nu_0}(\nu) = I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} \nu\right)$$

$$M_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu_0}{}'(\mu) = \lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} \mu\right) = \lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu_0} J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}-1}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} \mu\right) - \frac{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{\mu} J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} \mu\right)$$

$$\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} \quad tq \quad \alpha_{\mu_0}^{\mu} \lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} \mu_0\right) + \beta_{\mu_0}^{\mu} J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} \mu_0\right) = 0$$

$$N_{n_\varphi,n_\mu}^{\nu_0}{}'(\nu) = \lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} \nu_0\right) = \lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}-1}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} \nu_0\right) - \frac{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{\nu_0} I_m\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} \nu_0\right)$$

$$\left\|M_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\mu)\right\|^2 = \frac{\mu_0{}^2\left(\left(J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} \mu_0\right)\right)^2 + \left(J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} \mu_0\right)\right)^2\left(1 - \frac{\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\right)^2}{\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\right)^2 \mu_0{}^2}\right)\right)}{2}$$

$$A_{n_\varphi,n_\mu}^{\nu_0} = \frac{\displaystyle\int_0^{\mu_0} d\mu\, \mu \frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} \mu\right)\sqrt{\mu^2 + \nu_0{}^2}\displaystyle\int_0^{\varphi_0} d\varphi\, f_{\nu_0}^{\nu}(\mu,\varphi)\Phi_{n_\varphi}(\varphi)}{\left(\alpha_{\nu_0}^{\nu} \lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} \nu_0\right) + \sqrt{\mu^2 + \nu_0{}^2}\beta_{\nu_0}^{\nu} I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} \nu_0\right)\right)}}{\left\|M_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\mu)\right\|^2 \left\|\Phi_{n_\varphi}(\varphi)\right\|^2}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi) = \sum_{n_\varphi=0}^{+\infty} \sum_{n_\nu=1}^{+\infty} A_{n_\varphi,n_\mu}^{\nu_0} J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} \mu\right) I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} \nu\right)\Phi_{n_\varphi}(\varphi)$$

Le problème inhomogène en φ sur le secteur de paraboloïde plein de révolution

Il s'agit du problème suivant :

$$\alpha_{\mu_0}^{\mu},\beta_{\mu_0}^{\mu},\alpha_{\nu_0}^{\nu},\beta_{\nu_0}^{\nu},\alpha_{0}^{\varphi},\beta_{0}^{\varphi},\alpha_{\varphi_0}^{\varphi},\beta_{\varphi_0}^{\varphi}\in\{0,1\}$$

$$Et\quad \alpha_{\mu_0}^{\mu}=1-\beta_{\mu_0}^{\mu}\quad \alpha_{\nu_0}^{\nu}=1-\beta_{\nu_0}^{\nu}\quad \alpha_{\mu_0}^{\mu}=1-\beta_{\mu_0}^{\mu}\quad \alpha_{0}^{\varphi}=1-\beta_{0}^{\varphi}\quad \alpha_{\varphi_0}^{\varphi}=1-\beta_{\varphi_0}^{\varphi}$$

$$C.L.\quad \alpha_{\mu_0}^{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta_{\mu_0}^{\mu}\,T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\mu=\mu_0}=0\quad \alpha_{\nu_0}^{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta_{\nu_0}^{\nu}\,T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\nu=\nu_0}=0$$

$$\frac{\alpha_{0}^{\varphi}}{\mu\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi}-\beta_{0}^{\varphi}\,T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\varphi=0}=-f_{0}^{\varphi}(\mu,\nu)\quad \frac{\alpha_{\varphi_0}^{\varphi}}{\mu\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi}+\beta_{\varphi_0}^{\varphi}\,T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\varphi=\varphi_0}=f_{\varphi_0}^{\varphi}(\mu,\nu)$$

Ce problème fait intervenir de nouvelles catégories de fonctions de Bessel non modifiées ou modifiées d'ordre imaginaire, à savoir en revenant à la séparation des variables de l'équation de Laplace en coordonnées paraboliques de révolution:

$$T(\mu,\nu,\varphi)=M(\mu)N(\nu)\Psi(\varphi)\quad \Delta T(\mu,\nu,\varphi)=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases}M''(\mu)+\dfrac{1}{\mu}M'(\mu)-\left(\alpha_2+\dfrac{\alpha_3}{\mu^2}\right)M(\mu)=0\quad N''(\nu)+\dfrac{1}{\nu}N'(\nu)+\left(\alpha_2-\dfrac{\alpha_3}{\nu^2}\right)N(\nu)=0\\ \Psi''(\varphi)+\alpha_3\Psi(\varphi)=0\end{cases}$$

$$Cas\,(2)\quad \alpha_2=q^2\ et\ \alpha_3=-p^2\Rightarrow\begin{cases}M(\mu)=A_\mu I_{ip}(q\,\mu)+B_\mu K_{ip}(q\,\mu)\\ N(\nu)=A_\nu J_{ip}(q\nu)+B_\nu Y_{ip}(q\nu)\end{cases}$$

$$Cas\,(5)\quad \alpha_2=-q^2\ et\ \alpha_3=-p^2\Rightarrow\begin{cases}M(\mu)=A_\mu J_{ip}(q\,\mu)+B_\mu Y_{ip}(q\,\mu)\\ N(\nu)=A_\nu I_{ip}(q\nu)+B_\nu K_{ip}(q\nu)\end{cases}$$

$$\Psi''(\varphi)-p^2\Psi(\varphi)=0\Rightarrow\Psi(\varphi)=A\,Cosh(p\varphi)+B\,Sinh(p\varphi)$$

Il faut établir dans quelles conditions ce système de fonctions en μ et ν forme un système de fonctions propres à partir duquel on peut développer en série une solution du problème aux limites. La réponse est hélas négative pour une configuration pleine, mais positive pour une configuration creuse d'un secteur de paraboloïde de révolution. A savoir que les fonctions de Bessel de première espèce ou de deuxième espèce d'ordre imaginaire sont à valeur complexe et bornées. Et d'autre part les fonctions d'ordre imaginaires de Bessel non modifiées ou modifiées présentent une propriétés de rapides oscillations autour de l'origine des coordonnées paraboliques de révolution, à l'image d'un cylindre creux et des fonctions r^{ip}, (aucun lien fortuit avec « rest in peace »), à savoir :

$$Développement\ autour\ de\ zéro\ de\quad I_{ip}(q\,\mu)\quad ou\quad J_{ip}(q\nu)$$

$$J_\tau(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\tau}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\quad I_\tau(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\tau}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

$$I_{ip}(q\,\mu)=\left(\frac{q\,\mu}{2}\right)^{ip}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{q\,\mu}{2}\right)^{2k}\propto e^{ip Log(\mu)}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{q\,\mu}{2}\right)^{2k}$$

$$J_{ip}(q\nu)=\left(\frac{q\nu}{2}\right)^{ip}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{q\nu}{2}\right)^{2k}\propto e^{ip Log(\nu)}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)}{\Gamma(k+\tau+1)k!}\left(\frac{q\nu}{2}\right)^{2k}$$

Cette rapide oscillation même si elle reste bornée la rend impropre à caractériser tout forme de solution , a fortiori de fonctions propres tant en μ que ν. Il s'avère également si l'on retient τ et q comme paramètres pour les solutions du problèmes homogène, leur spectre est continu, car il est trivial de produire une solution qui respecte l'annulation au bord du domaine (par exemple dans le cas de Dirichlet). Si l'on fait face à une spectre continu, on pense tout de suite à tenter d'employer des transformations intégrales.

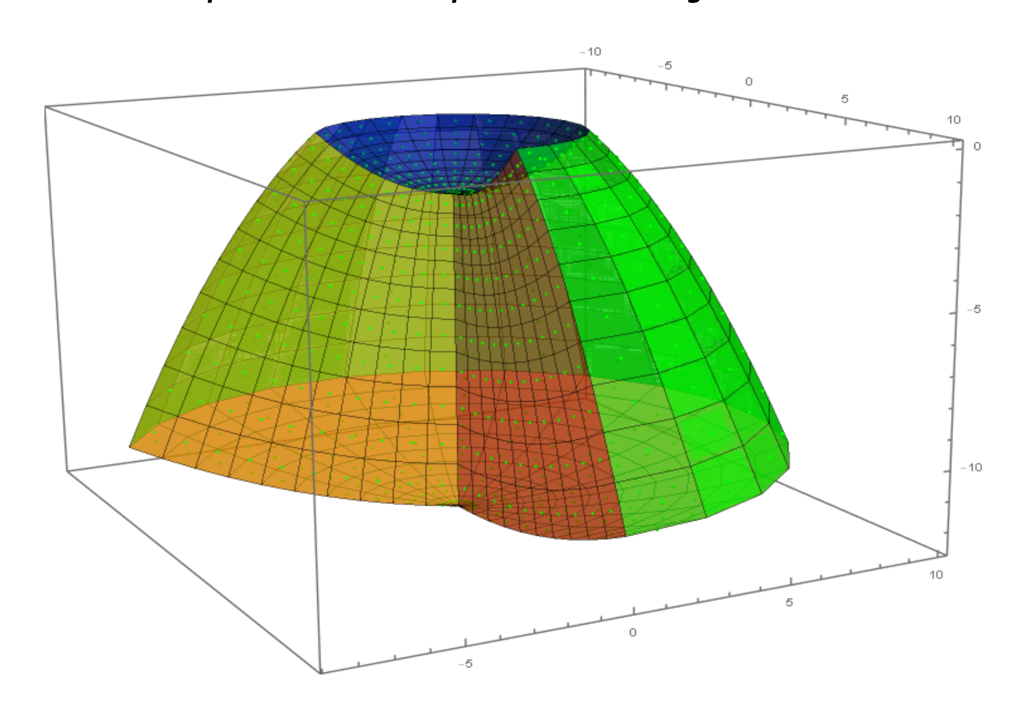
Pour aller plus loin dans l'analyse du problème, les deux cas de solutions issues de la séparation des variables peut nous faire penser à envisager un développement sous forme d'intégrales de Kontorovich-Lebedev. Il faut alors envisager une transformation de Kontorovich-Lebedev complémentaire dans les deux cas (2) et (5). Mais dans ce cas on doit également trouver une intégration sur la dimension complémentaire soit en μ, soit en ν. Or il n'existe pas de théorème d'inversion commode pour une transformation intégrale avec les fonctions de Bessel J d'ordre purement imaginaire (dans ce cas il faut développer avec la partie réelle ou imaginaire de Bessel J). Il se trouve qu'il existe bien une formule d'inversion établie par S.B Yakubovich dans une article de 1998, « The Titchmarsh integral transformation by the index of a Bessel function », faisant appel à une transformation intégrale avec un noyau de Bessel J d'ordre imaginaire et son inverse comportant un noyau en fonction de Lommel de deuxième espèce. Cette dernière intégrale est alors fortement instable numériquement et ne se prête pas vraiment à des simulations numériques. Par ailleurs construire une solution à l'aide d'une double transformation intégrale de Kontorovich-Lebedev sur l'une des variables et de Titchmarsh-Yakubovich sur l'autre n'est pas une mince affaire théorique.

Pour le problème général inhomogène en ϕ, on a donc fait « choux blancs » ! Ce qui ne veut pas dire que l'on trouve pas par séparation des variables des solutions particulières à des problèmes particuliers inhomogènes en ϕ plus simples.

La seule solution triviale d'un problème inhomogène en ϕ serait le cas d'un paraboloîde de révolution soumis sur les faces externe à une condition de Neumann homogène, et sur les deux faces azimutale est des conditions distinctes T_0 *et* $T_{\varphi 0}$ *, et dans ce cas la solution est triviale :*

$$T(\mu,\nu,\varphi) = T(\varphi) = \frac{T_0(\varphi_0 - \varphi) + T_{\varphi 0}\varphi}{\varphi_0}$$

Secteur de paraboloïde « semi-creux » de révolution soumis à des conditions aux limites dépendantes ou indépendantes de l'angle azimutal



Le problème intérieur aux limites le plus général de l'équation de Laplace se présente comme suit :

$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}\right)+\frac{1}{\mu^2\nu^2}\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

$$(\mu,\nu,\varphi)\in\Omega=[0,\mu_0]\times[\nu_1,\nu_2]\times[0,\varphi_0]\quad T(\mu,\nu,\varphi)\ fini$$

$$Cas\ envisagés : Dirichlet\ ou\ Neumann \Rightarrow \alpha^{\mu}_{\mu_0},\beta^{\mu}_{\mu_0},\alpha^{\nu}_{\nu_1},\beta^{\nu}_{\nu_1},\alpha^{\nu}_{\nu_2},\beta^{\nu}_{\nu_2},\alpha^{\varphi}_{0},\beta^{\varphi}_{0},\alpha^{\varphi}_{\varphi_0},\beta^{\varphi}_{\varphi_0}\in\{0,1\}$$

$$Et\quad \alpha^{\mu}_{\mu_0}=1-\beta^{\mu}_{\mu_0}\quad \alpha^{\nu}_{\nu_1}=1-\beta^{\nu}_{\nu_1}\quad \alpha^{\nu}_{\nu_2}=1-\beta^{\nu}_{\nu_2}\quad \alpha^{\mu}_{\mu_0}=1-\beta^{\mu}_{\mu_0}\quad \alpha^{\varphi}_{0}=1-\beta^{\varphi}_{0}\quad \alpha^{\varphi}_{\varphi_0}=1-\beta^{\varphi}_{\varphi_0}$$

$$C.L.\quad \left.\frac{\alpha^{\mu}_{\mu_0}}{\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta^{\mu}_{\mu_0}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\mu=\mu_0}=f^{\mu}_{\mu_0}(\nu,\varphi)$$

$$\left.\frac{\alpha^{\nu}_{\nu_1}}{\sqrt{\mu^2+{\nu_1}^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta^{\nu}_{\nu_1}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_1}=-f^{\nu}_{\nu_1}(\mu,\varphi)\qquad \left.\frac{\alpha^{\nu}_{\nu_2}}{\sqrt{\mu^2+{\nu_2}^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta^{\nu}_{\nu_2}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_2}=f^{\nu}_{\nu_2}(\mu,\varphi)$$

$$\left.\frac{\alpha^{\varphi}_{0}}{\mu\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta^{\varphi}_{0}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\varphi=0}=-f^{\varphi}_{0}(\mu,\nu)\qquad \left.\frac{\alpha^{\varphi}_{\varphi_0}}{\mu\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta^{\varphi}_{\varphi_0}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\varphi=\varphi_0}=f^{\varphi}_{\varphi_0}(\mu,\nu)$$

Que l'on peut scinder en trois types de problèmes :
- le problème inhomogène en μ, homogène dans les deux autres dimensions
- le problème inhomogène en ν, homogène dans les deux autres dimensions
- le problème inhomogène en ϕ, homogène dans les deux autres dimensions

On utilisera la simplification des coefficients des conditions aux limites homogènes puisque l'on envisage uniquement des conditions de Dirichlet ou de Neumann.

Le problème inhomogène en µ sur le secteur de paraboloïde plein de révolution

Il s'agit du problème suivant :

$$\alpha_{\mu_0}^{\mu},\beta_{\mu_0}^{\mu},\alpha_{\nu_1}^{\nu},\beta_{\nu_1}^{\nu},\alpha_{\nu_2}^{\nu},\beta_{\nu_2}^{\nu},\alpha_{0}^{\varphi},\beta_{0}^{\varphi},\alpha_{\varphi_0}^{\varphi},\beta_{\varphi_0}^{\varphi}\in\{0,1\}$$

$$Et\quad \alpha_{\mu_0}^{\mu}=1-\beta_{\mu_0}^{\mu}\quad \alpha_{\nu_1}^{\nu}=1-\beta_{\nu_1}^{\nu}\quad \alpha_{\nu_2}^{\nu}=1-\beta_{\nu_2}^{\nu}\quad \alpha_{\mu_0}^{\mu}=1-\beta_{\mu_0}^{\mu}\quad \alpha_{0}^{\varphi}=1-\beta_{0}^{\varphi}\quad \alpha_{\varphi_0}^{\varphi}=1-\beta_{\varphi_0}^{\varphi}$$

$$C.L.\quad \left.\frac{\alpha_{\mu_0}^{\mu}}{\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta_{\mu_0}^{\mu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\mu=\mu_0}=f_{\mu_0}^{\mu}(\nu,\varphi)$$

$$\left.\alpha_{\nu_1}^{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta_{\nu_1}^{\nu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_1}=0\quad \left.\alpha_{\nu_2}^{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta_{\nu_2}^{\nu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_2}=0$$

$$\left.\alpha_{0}^{\varphi}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta_{0}^{\varphi}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\varphi=0}=0\quad \left.\alpha_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta_{\varphi_0}^{\varphi}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\varphi=\varphi_0}=0$$

Si l'on commence par les fonctions azimutales sur un secteur d'angle ϕ0, elles ont la forme connue et déjà calculée dans d'autres configurations géométriques (le cylindre par exemple) :

$$\Phi_{n_\varphi}(\varphi)=\alpha_0^{\varphi}\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi\right)+\beta_0^{\varphi}Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi\right)$$

$$\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\ \text{valeurs propres solution de}\quad Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\left(\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\right)^2\alpha_0^{\varphi}\alpha_{\varphi_0}^{\varphi}-\beta_0^{\varphi}\beta_{\varphi_0}^{\varphi}\right)=\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\left(\beta_{\varphi_0}^{\varphi}\alpha_0^{\varphi}+\beta_0^{\varphi}\alpha_{\varphi_0}^{\varphi}\right)$$

$$\left\|\Phi_{n_\varphi}(\varphi)\right\|^2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\theta_0\left(\left(\alpha_0^{\varphi}\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)+\beta_0^{\varphi}Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\right)^2+\left(\alpha_0^{\varphi}\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)-\beta_0^{\varphi}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\right)^2\right)\\+\frac{1}{\lambda_{n_\theta}^{\theta}}\left(\alpha_0^{\varphi}\lambda_{n_\theta}^{\theta}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)+\beta_0^{\varphi}Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\right)\left(\alpha_0^{\varphi}\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)-\beta_0^{\varphi}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\right)+\alpha_0^{\varphi}\beta_0^{\varphi}\end{bmatrix}$$

D'après tous les calculs déjà réalisés, les fonctions propres en ν sont les suivantes :

$$N_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}(\nu)=\frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}-\frac{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}$$

$$\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\quad tq\quad \frac{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_2\right)+\beta_{\nu_2}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_2\right)}=\frac{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_2\right)+\beta_{\nu_2}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_2\right)}$$

$$N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)=\frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}-\frac{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}$$

$$N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)=\frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_2\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}-\frac{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_2\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}$$

$$\frac{N_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}{}'(\nu_1)}{\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}}=D_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}(\nu_1)=\frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}-\frac{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\mu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}$$

$$\frac{N_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}{}'(\nu_2)}{\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}}=D_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}(\nu_2)=\frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_2\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}-\frac{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_2\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}$$

$$\left\|N_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}(\nu)\right\|^2=\frac{{\nu_2}^2\left(\left(D_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}(\nu_2)\right)^2+\left(N_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}(\nu_2)\right)^2\left(1-\frac{\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\right)^2}{{\nu_2}^2\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\right)^2}\right)\right)-{\nu_1}^2\left(\left(D_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}(\nu_1)\right)^2+\left(N_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}(\nu_1)\right)^2\left(1-\frac{\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\right)^2}{{\nu_1}^2\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\right)^2}\right)\right)}{2}.$$

Les fonctions en μ sont les suivantes :

$$M_{n_\varphi,n_\nu}^{\mu_0}(\mu)=I_{\lambda_{n_\varphi}^\varphi}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^\nu\mu\right)\Rightarrow M_{n_\varphi,n_\nu}^{\mu_0}{}'(\mu_0)=\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^\nu I_{\lambda_{n_\varphi}^\varphi}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^\nu\mu_0\right)=\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^\nu I_{\lambda_{n_\varphi}^\varphi-1}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^\nu\ \mu_0\right)-\frac{\lambda_{n_\varphi}^\varphi}{\mu_0}I_m\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^\nu\ \mu_0\right)$$

Les intégrales dérivant de la condition inhomogène en μ_0, ainsi que la solution deviennent :

$$A_{n_\varphi,n_\nu}^{\mu_0}=\frac{\displaystyle\int_0^{\nu_0}d\nu\,\nu\,\frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^\varphi}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^\nu\nu\right)\sqrt{\mu_0{}^2+\nu^2}\int_0^{\varphi_0}d\varphi\ f_{\mu_0}^\mu(\nu,\varphi)\Phi_{n_\varphi}(\varphi)}{\left(\alpha_{\mu_0}^\mu\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^\nu I_{\lambda_{n_\varphi}^\varphi}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^\nu\mu_0\right)+\sqrt{\mu_0{}^2+\nu^2}\beta_{\mu_0}^\mu I_{\lambda_{n_\varphi}^\varphi}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^\nu\mu_0\right)\right)}}{\left\|N_{m,n}^{\nu_0}(\nu)\right\|^2\left\|\Phi_{n_\varphi}(\varphi)\right\|^2}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{n_\varphi=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty}A_{n_\varphi,n_\nu}^{\mu_0}I_{\lambda_{n_\varphi}^\varphi}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^\nu\mu\right)J_{\lambda_{n_\varphi}^\varphi}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^\nu\nu\right)\Phi_{n_\varphi}(\varphi)$$

Le problème inhomogène en ν sur le secteur de paraboloïde semi-creux de révolution

Il s'agit du problème suivant :

$$\alpha_{\mu_0}^\mu,\beta_{\mu_0}^\mu,\alpha_{\nu_1}^\nu,\beta_{\nu_1}^\nu,\alpha_{\nu_2}^\nu,\beta_{\nu_2}^\nu,\alpha_0^\varphi,\beta_0^\varphi,\alpha_{\varphi_0}^\varphi,\beta_{\varphi_0}^\varphi\in\{0,1\}$$

$$Et\quad \alpha_{\mu_0}^\mu=1-\beta_{\mu_0}^\mu\quad \alpha_{\nu_1}^\nu=1-\beta_{\nu_1}^\nu\quad \alpha_{\nu_2}^\nu=1-\beta_{\nu_2}^\nu\quad \alpha_{\mu_0}^\mu=1-\beta_{\mu_0}^\mu\quad \alpha_0^\varphi=1-\beta_0^\varphi\quad \alpha_{\varphi_0}^\varphi=1-\beta_{\varphi_0}^\varphi$$

$$C.L.\quad \alpha_{\mu_0}^\mu\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta_{\mu_0}^\mu T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\mu=\mu_0}=0$$

$$\frac{\alpha_{\nu_1}^\nu}{\sqrt{\mu^2+\nu_1{}^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta_{\nu_1}^\nu T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\nu=\nu_1}=-f_{\nu_1}^\nu(\mu,\varphi)\quad \frac{\alpha_{\nu_2}^\nu}{\sqrt{\mu^2+\nu_2{}^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta_{\nu_2}^\nu T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\nu=\nu_2}=f_{\nu_2}^\nu(\mu,\varphi)$$

$$\alpha_0^\varphi\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta_0^\varphi T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\varphi=0}=0\quad \alpha_{\varphi_0}^\varphi\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta_{\varphi_0}^\varphi T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\varphi=\varphi_0}=0$$

Les fonctions propres azimutales restent identiques au cas précédents, et les fonctions propres en μ sont des fonctions de Bessel J :

$$\Phi_{n_\varphi}(\varphi)=\alpha_0^\varphi\lambda_{n_\varphi}^\varphi Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^\varphi\varphi\right)+\beta_0^\varphi Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^\varphi\varphi\right)$$

$$\lambda_{n_\varphi}^\varphi\ \text{valeurs propres solution de}\quad Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^\varphi\varphi_0\right)\left(\left(\lambda_{n_\varphi}^\varphi\right)^2\alpha_0^\varphi\alpha_{\varphi_0}^\varphi-\beta_0^\varphi\beta_{\varphi_0}^\varphi\right)=\lambda_{n_\varphi}^\varphi Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^\varphi\varphi_0\right)\left(\beta_{\varphi_0}^\varphi\alpha_0^\varphi+\beta_0^\varphi\alpha_{\varphi_0}^\varphi\right)$$

$$\left\|\Phi_{n_\varphi}(\varphi)\right\|^2=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\theta_0\left(\left(\alpha_0^\varphi\lambda_{n_\varphi}^\varphi Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^\varphi\varphi_0\right)+\beta_0^\varphi Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^\varphi\varphi_0\right)\right)^2+\left(\alpha_0^\varphi\lambda_{n_\varphi}^\varphi Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^\varphi\varphi_0\right)-\beta_0^\varphi Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^\varphi\varphi_0\right)\right)^2\right)\\+\frac{1}{\lambda_{n_\theta}^\theta}\left(\alpha_0^\varphi\lambda_{n_\theta}^\theta Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^\varphi\varphi_0\right)+\beta_0^\varphi Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^\varphi\varphi_0\right)\right)\left(\alpha_0^\varphi\lambda_{n_\varphi}^\varphi Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^\varphi\varphi_0\right)-\beta_0^\varphi Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^\varphi\varphi_0\right)\right)+\alpha_0^\varphi\beta_0^\varphi\end{array}\right]$$

$$M_{n_\varphi,n_\mu}^\mu(\mu)=J_{\lambda_{n_\varphi}^\varphi}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^\mu\mu\right)\qquad M_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu_0}{}'(\mu)=\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^\mu J_{\lambda_{n_\varphi}^\varphi}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^\mu\mu\right)=\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu_0}J_{\lambda_{n_\varphi}^\varphi-1}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^\mu\mu\right)-\frac{\lambda_{n_\varphi}^\varphi}{\mu}J_{\lambda_{n_\varphi}^\varphi}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^\mu\ \mu\right)$$

$$\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^\mu\quad tq\quad \alpha_{\mu_0}^\mu\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^\mu J_{\lambda_{n_\varphi}^\varphi}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^\mu\mu_0\right)+\beta_{\mu_0}^\mu J_{\lambda_{n_\varphi}^\varphi}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^\mu\mu_0\right)=0$$

$$\left\|M_{n_\varphi,n_\mu}^\mu(\mu)\right\|^2=\frac{\mu_0{}^2\left(\left(J_{\lambda_{n_\varphi}^\varphi}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^\mu\mu_0\right)\right)^2+\left(J_{\lambda_{n_\varphi}^\varphi}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^\mu\mu_0\right)\right)^2\left(1-\frac{\left(\lambda_{n_\varphi}^\varphi\right)^2}{\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^\mu\right)^2\mu_0{}^2}\right)\right)}{2}$$

Les fonctions en v , les intégrales et la solution deviennent :

$$N_{n_\varphi,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu)=\frac{I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu_1\right)}-\frac{K_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}K_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}K_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu_1\right)}$$

$$N_{n_\varphi,n_\mu}^{0,\nu_2}{}'(\nu)=\frac{I_m'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu_1\right)}-\frac{K_m'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}K_m'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}K_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu_1\right)}$$

$$N_{n_\varphi,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu)=\frac{I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu_2\right)+\beta_{\nu_2}^{\nu}I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu_2\right)}-\frac{K_m\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}K_m'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu_2\right)+\beta_{\nu_2}^{\nu}K_m\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu_2\right)}$$

$$N_{n_\varphi,n_\mu}^{\nu_1,0}{}'(\nu)=\frac{I_m'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu_2\right)+\beta_{\nu_2}^{\nu}I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu_2\right)}-\frac{K_m'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}K_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu_2\right)+\beta_{\nu_2}^{\nu}K_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu_2\right)}$$

$$A_{n_\varphi,n_\mu}^{\nu_1}=\frac{\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\,\dfrac{M_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_1{}^2}\int_0^{\varphi_0}d\varphi\,f_{\nu_1}^{\nu}(\mu,\varphi)\Phi_{n_\varphi}(\varphi)}{\left(\sqrt{\mu^2+\nu_1{}^2}\,\beta_{\nu_1}^{\nu}N_{n_\varphi,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu_1)-\alpha_{\nu_1}^{\nu}N_{n_\varphi,n_\mu}^{\nu_1,0}{}'(\nu_1)\right)}}{\left\|M_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\mu)\right\|^2\left\|\Phi_{n_\varphi}(\varphi)\right\|^2}$$

$$A_{n_\varphi,n_\mu}^{\nu_2}=\frac{\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\,\dfrac{M_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_2{}^2}\int_0^{\varphi_0}d\varphi\,f_{\nu_2}^{\nu}(\mu,\varphi)\Phi_{n_\varphi}(\varphi)}{\left(\sqrt{\mu^2+\nu_2{}^2}\,\beta_{\nu_2}^{\nu}N_{n_\varphi,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu_2)+\alpha_{\nu_2}^{\nu}N_{n_\varphi,n_\mu}^{0,\nu_2}{}'(\nu_2)\right)}}{\left\|M_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\mu)\right\|^2\left\|\Phi_{n_\varphi}(\varphi)\right\|^2}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{n_\varphi=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}\left(A_{n_\varphi,n_\mu}^{\nu_1}N_{n_\varphi,n_\mu}^{\nu_1,0}(\nu)+A_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu_2}N_{n_\varphi,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu)\right)M_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\mu)\Phi_{n_\varphi}(\varphi)$$

Le problème inhomogène en φ sur le secteur de paraboloïde semi-creux de révolution

Il s'agit du problème suivant :

$$\alpha_{\mu_0}^{\mu},\beta_{\mu_0}^{\mu},\alpha_{\nu_1}^{\nu},\beta_{\nu_1}^{\nu},\alpha_{\nu_2}^{\nu},\beta_{\nu_2}^{\nu},\alpha_{0}^{\varphi},\beta_{0}^{\varphi},\alpha_{\varphi_0}^{\varphi},\beta_{\varphi_0}^{\varphi} \in \{0,1\}$$

$$Et \quad \alpha_{\mu_0}^{\mu}=1-\beta_{\mu_0}^{\mu} \quad \alpha_{\nu_1}^{\nu}=1-\beta_{\nu_1}^{\nu} \quad \alpha_{\nu_2}^{\nu}=1-\beta_{\nu_2}^{\nu} \quad \alpha_{\mu_0}^{\mu}=1-\beta_{\mu_0}^{\mu} \quad \alpha_{0}^{\varphi}=1-\beta_{0}^{\varphi} \quad \alpha_{\varphi_0}^{\varphi}=1-\beta_{\varphi_0}^{\varphi}$$

$$C.L. \quad \alpha_{\mu_0}^{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta_{\mu_0}^{\mu}\,T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\mu=\mu_0}=0 \quad \alpha_{\nu_0}^{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta_{\nu_0}^{\nu}\,T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\nu=\nu_0}=0$$

$$\frac{\alpha_{0}^{\varphi}}{\mu\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi}-\beta_{0}^{\varphi}\,T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\varphi=0}=-f_{0}^{\varphi}(\mu,\nu) \quad \frac{\alpha_{\varphi_0}^{\varphi}}{\mu\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi}+\beta_{\varphi_0}^{\varphi}\,T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\varphi=\varphi_0}=f_{\varphi_0}^{\varphi}(\mu,\nu)$$

Ce problème fait également intervenir de nouvelles catégories de fonctions de Bessel non modifiées ou modifiées d'ordre imaginaire, à savoir en revenant à la séparation des variables de l'équation de Laplace en coordonnées paraboliques de révolution:

$$T(\mu,\nu,\varphi)=M(\mu)N(\nu)\Psi(\varphi) \quad \Delta T(\mu,\nu,\varphi)=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} M''(\mu)+\dfrac{1}{\mu}M'(\mu)-\left(\alpha_2+\dfrac{\alpha_3}{\mu^2}\right)M(\mu)=0 \quad N''(\nu)+\dfrac{1}{\nu}N'(\nu)+\left(\alpha_2-\dfrac{\alpha_3}{\nu^2}\right)N(\nu)=0 \\ \Psi''(\varphi)+\alpha_3\Psi(\varphi)=0 \end{cases}$$

$$Cas\,(2) \quad \alpha_2=q^2 \; et \; \alpha_3=-p^2 \Rightarrow \begin{cases} M(\mu)=A_\mu I_{ip}(q\,\mu)+B_\mu K_{ip}(q\,\mu) \\ N(\nu)=A_\nu J_{ip}(q\nu)+B_\nu Y_{ip}(q\nu) \end{cases}$$

$$Cas\,(5) \quad \alpha_2=-q^2 \; et \; \alpha_3=-p^2 \Rightarrow \begin{cases} M(\mu)=A_\mu J_{ip}(q\,\mu)+B_\mu Y_{ip}(q\,\mu) \\ N(\nu)=A_\nu I_{ip}(q\nu)+B_\nu K_{ip}(q\nu) \end{cases}$$

$$\Psi''(\varphi)-p^2\Psi(\varphi)=0 \Rightarrow \Psi(\varphi)=A\,Cosh(p\varphi)+B\,Sinh(p\varphi)$$

Il faut établir dans quelles conditions ce système de fonctions en μ et ν forme un système de fonctions propres à partir duquel on peut développer en série ou sous forme d'intégrale, une solution du problème aux limites. Par ailleurs comme dans le cas du secteur plein, il y a une rapide oscillation des fonctions de Bessel d'ordre imaginaire autour de 0, tout comme la présence d'un spectre continu du paramètre p.

Illustrons le problème par un cas très concret dont on peut voir qu'il n'y pas de solutions évidentes. Le voici dans le point suivant :

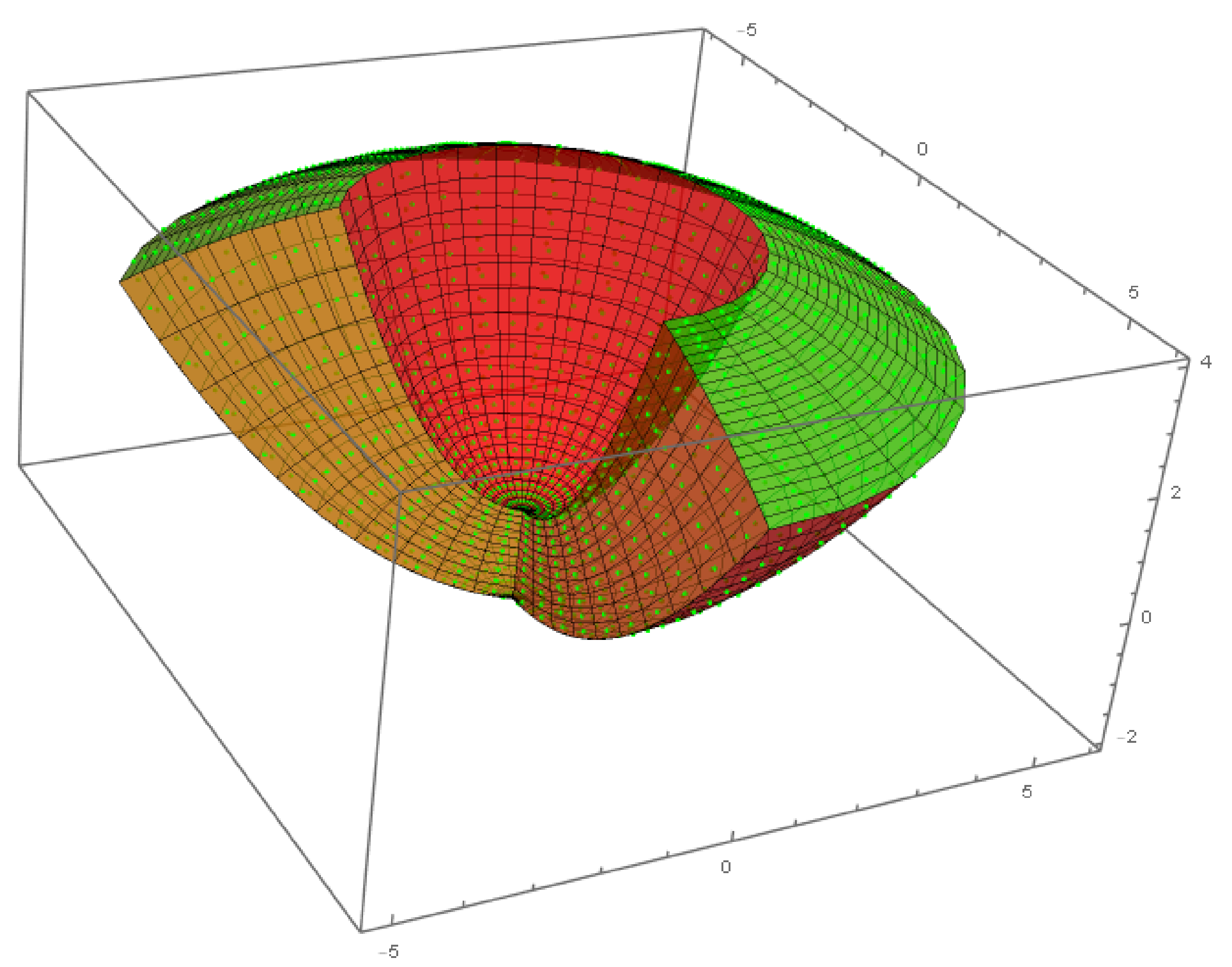
<u>Application de la transformation Intégrale de Ya.S.Uflyand-E.A.Yushkova à un problème aux limites sur un secteur azimutal de paraboloïde de révolution « semi-creux »</u>

Soit le problème aux limites de Dirichlet suivant sur le secteur de paraboloïde « semi-creux », inhomogène en angle azimutal :

$$\Delta T(\mu,\nu,\varphi)=\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}\right)+\frac{1}{\mu^2\nu^2}\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

$$\mu\in[0,\mu_0]\quad \nu\in[\nu_1,\nu_2]\quad \varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\mu=\mu_0}=T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_1}=0=T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_2}=0\qquad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_1}=f_1(\mu,\nu)\qquad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_2}=f_2(\mu,\nu)$$



Les faces d'angle azimutal constant sont faces des tranches, ici en brum. La face μ=μ0 est la verte. Et les deux faces ν=ν1 et ν=ν2, sont les rouges.

Introduisons une transformation intégrales similaires à la transformation de Kontorovich-Lebedev dans ce qui suit.

<u>Transformation Intégrale de Kontorovich-Ya.S.Uflyand-E. A.Yushkova (transformation de type Kontorovich-Lebedev)</u>

Pour toute fonction f(x) sur l'intervalle [0,α], telle que f(α)=0, si :
1 - continue par morceau et dont la variation est bornée sur tout intervalle $[x_1,x_2]$ de [0,α] et
2 - telle que l'intégrale est finie : $\int_0^\alpha dx \frac{|f(x)|}{\sqrt{x}} Log\left(\frac{1}{x}\right) < \infty$

Alors cette dernière admet la représentation intégrale suivante, pour x € [0,α] modifiée de Kontorovich-Lebedev, il vient :

$$\left.\begin{matrix} M_{i\tau}(x,\alpha) = I_{i\tau}(x)K_{i\tau}(\alpha) - I_{i\tau}(\alpha)K_{i\tau}(x) \\ f(x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\ \tau)\frac{M_{i\tau}(x,\alpha)}{|I_{i\tau}(\alpha)|^2}\int_0^\alpha dt\ f(t)\frac{M_{i\tau}(t,\alpha)}{t} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{f}(\tau,\alpha) = \int_0^\alpha dt\ f(t)\frac{M_{i\tau}(t,\alpha)}{t} & transformée \\ f(x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\ \tau)\frac{M_{i\tau}(x,\alpha)}{|I_{i\tau}(\alpha)|^2}\tilde{f}(\tau,\alpha) & transformée\ inverse \end{cases}$$

Avant d'appliquer cette transformation pour résoudre le problème aux limites démontrons la réalité du noyau. Pour la fonction de MacDonald K c'est relativement évident : $K_\nu(x) = K_{-\nu}(x) \Rightarrow K_{-i\tau}(x) = K_{i\tau}(x) = \overline{K_{i\tau}(x)} \Rightarrow K_{i\tau}(x) \in \mathbf{R}$. *Concernant la fonction modifiée de Bessel I, la combinaison linéaire suivante est réelle :* $L_{i\tau}(x) = \frac{\pi}{2Sinh(\pi\tau)}(I_{i\tau}(x) + I_{-i\tau}(x)) \in \mathbf{R}$. *De même la formule de connexion en les fonctions de Bessel K et I d'ordre purement imaginaire est la suivante :* $K_{i\tau}(x) = \frac{\pi}{2iSinh(\pi\tau)}(I_{-i\tau}(x) - I_{i\tau}(x))$.

Partons de la combinaison du noyau, on montre qu'elle est bien réelle :

$$M_{i\tau}(x,\alpha) = I_{i\tau}(x)K_{i\tau}(\alpha) - I_{i\tau}(\alpha)K_{i\tau}(x)$$

$$\begin{cases} \frac{2Sinh(\pi\tau)L_{i\tau}(x)}{\pi} = I_{i\tau}(x) + I_{-i\tau}(x) \\ -\frac{2iSinh(\pi\tau)K_{i\tau}(x)}{\pi} = I_{i\tau}(x) - I_{-i\tau}(x) \end{cases} \Rightarrow I_{i\tau}(x) = \frac{2Sinh(\pi\tau)}{\pi}(L_{i\tau}(x) - iK_{i\tau}(x)).$$

$$\Rightarrow M_{i\tau}(x,\alpha) = \frac{2Sinh(\pi\tau)}{\pi}(L_{i\tau}(x)K_{i\tau}(\alpha) - L_{i\tau}(\alpha)K_{i\tau}(x)) \Rightarrow N_{i\tau}(x,\alpha) \in \mathbf{R}$$

On peut légèrement modifier la transformation d'Uflyand :

$$x \to \xi = \gamma\ x \quad \alpha \to \gamma\ x_0$$

$$M_{i\tau}(\xi,\gamma\ x_0) = M_{i\tau}(\gamma\ x,\gamma\ x_0) = M_{i\tau}(\gamma,x,x_0) = I_{i\tau}(\gamma\ x)K_{i\tau}(\gamma\ x_0) - I_{i\tau}(\gamma\ x_0)K_{i\tau}(\gamma\ x)$$

$$\Rightarrow f(\xi) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\ \tau)\frac{M_{i\tau}(\xi,\gamma\ \alpha)}{|I_{i\tau}(\gamma\ x_0)|^2}\int_0^{\gamma\ x_0} d\zeta\ f(\zeta)\frac{M_{i\tau}(\zeta,\gamma\ x_0)}{\zeta}$$

$$\Rightarrow f(\gamma x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\ \tau)\frac{M_{i\tau}(\gamma,x,x_0)}{|I_{i\tau}(\gamma\ x_0)|^2}\int_0^{x_0} dt\ f(\gamma t)\frac{M_{i\tau}(\gamma t,\gamma\ x_0)}{t} \leftarrow \zeta = \gamma t$$

$$\Rightarrow f(\gamma x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\ \tau)\frac{M_{i\tau}(\gamma,x,x_0)}{|I_{i\tau}(\gamma\ x_0)|^2}\int_0^{x_0} dt\ f(\gamma t)\frac{M_{i\tau}(\gamma,t,x_0)}{t} \leftarrow \begin{cases} f(\gamma x) \to f(x) \\ f(\gamma t) \to f(t) \end{cases}$$

Et l'on obtient la transformation suivante :

$$\left.\begin{array}{l} M_{i\tau}(\gamma,x,x_0)=I_{i\tau}(\gamma x)K_{i\tau}(\gamma x_0)-I_{i\tau}(\gamma x_0)K_{i\tau}(\gamma x) \\ f(x)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\,\tau)\frac{M_{i\tau}(\gamma,x,x_0)}{|I_{i\tau}(\gamma x_0)|^2}\int_0^{x_0} dt\ f(t)\frac{M_{i\tau}(\gamma,t,x_0)}{t} \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{ll} \tilde{f}(\tau,\gamma,x_0)=\int_0^{x_0} dt\ f(t)\frac{M_{i\tau}(\gamma,t,x_0)}{t} & \textit{transformée} \\ f(x)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\,\tau)\frac{M_{i\tau}(\gamma,t,x_0)}{|I_{i\tau}(\gamma x_0)|^2}\tilde{f}(\tau,\gamma,x_0) & \textit{transformée inverse} \end{array}\right.$$

Voyons s'il existe une combinaison linéaire réelle existante, cette fois des fonctions de Bessel J et Y d'ordre purement imaginaire. Tout d'abord les deux combinaisons linéaires suivantes sont par évidence réelles :

$$F_{i\tau}(x)=\frac{1}{2Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}(J_{i\tau}(x)+J_{-i\tau}(x))=\frac{\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(x)\}}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\in\mathbf{R}\qquad G_{i\tau}(x)=\frac{1}{2iSinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}(J_{i\tau}(x)-J_{-i\tau}(x))=\frac{\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(x)\}}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\in\mathbf{R}$$

La formule de connexion entre les fonctions Bessel J et Y d'ordre purement imaginaire est la suivante :

$$\begin{cases} J_{i\tau}(x)=\frac{1}{iSinh(\pi\tau)}(Y_{-i\tau}(x)-Cosh(\pi\tau)Y_{i\tau}(x)) \\ J_{-i\tau}(x)=\frac{1}{-iSinh(\pi\tau)}(Y_{i\tau}(x)-Cosh(\pi\tau)Y_{-i\tau}(x)) \end{cases}\Rightarrow Y_{i\tau}(x)=\frac{1}{iSinh(\pi\tau)}(Cosh(\pi\tau)J_{i\tau}(x)-J_{-i\tau}(x)).$$

Partons de la combinaison linéaire suivante :

$$J_{i\tau}(x)Y_{i\tau}(\alpha)-J_{i\tau}(\alpha)Y_{i\tau}(x)=\frac{J_{i\tau}(\alpha)J_{-i\tau}(x)-J_{i\tau}(x)J_{-i\tau}(\alpha)}{iSinh(\pi\tau)}$$

$$\Rightarrow\overline{J_{i\tau}(x)Y_{i\tau}(\alpha)-J_{i\tau}(\alpha)Y_{i\tau}(x)}=\frac{J_{-i\tau}(\alpha)J_{i\tau}(x)-J_{-i\tau}(x)J_{i\tau}(\alpha)}{-iSinh(\pi\tau)}=\frac{J_{i\tau}(\alpha)J_{-i\tau}(x)-J_{i\tau}(x)J_{-i\tau}(\alpha)}{iSinh(\pi\tau)}=J_{i\tau}(x)Y_{i\tau}(\alpha)-J_{i\tau}(\alpha)Y_{i\tau}(x)$$

$$\textit{Egalement}\quad\frac{J_{i\tau}(\alpha)J_{-i\tau}(x)-J_{-i\tau}(\alpha)J_{i\tau}(x)}{2i}=\left(\frac{J_{i\tau}(\alpha)-J_{-i\tau}(\alpha)}{2i}\right)\left(\frac{J_{i\tau}(x)+J_{-i\tau}(x)}{2}\right)-\left(\frac{J_{i\tau}(\alpha)+J_{-i\tau}(\alpha)}{2}\right)\left(\frac{J_{i\tau}(x)-J_{-i\tau}(x)}{2i}\right)$$

$$J_{i\tau}(x)Y_{i\tau}(\alpha)-J_{i\tau}(\alpha)Y_{i\tau}(x)=\frac{2}{Sinh(\pi\tau)}\{\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(x)\}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(\alpha)\}-\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(x)\}\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(\alpha)\}\}$$

Donc la combinaison linéaire suivante est réelle : $J_{i\tau}(x)Y_{i\tau}(\alpha)-J_{i\tau}(\alpha)Y_{i\tau}(x)\in\mathbf{R}$*, et au passage on a établi la correspondance avec les parties réelles et imaginaire des fonctions de Bessel J d'ordre purement imaginaire.*

Revenons au problème aux limites de Dirichlet suivant sur le secteur de paraboloïde de révolution tronqué $T(\mu,\nu,\varphi)|_{\mu=\mu_0}=T(\mu,\nu,\varphi)|_{\nu=\nu_1}=T(\mu,\nu,\varphi)|_{\nu=\nu_2}=0\qquad T(\mu,\nu,\varphi)|_{\varphi=\varphi_1}=f_1(\mu,\nu)\qquad T(\mu,\nu,\varphi)|_{\varphi=\varphi_2}=f_2(\mu,\nu)$*. Il y a deux choix de solutions avec les variables τ ,γ issues de la séparation de l'équation de Laplace :*

$$(1)\quad\begin{cases} M(\mu)=I_{i\tau}(\gamma\mu)K_{i\tau}(\gamma\mu_0)-I_{i\tau}(\gamma\mu_0)K_{i\tau}(\gamma\mu) \\ N(\nu)=Y_{i\tau}(\gamma\nu_1)J_{i\tau}(\gamma\nu)-J_{i\tau}(\gamma\nu_1)Y_{i\tau}(\gamma\nu) \end{cases}$$

$$(2)\quad\begin{cases} M(\mu)=Y_{i\tau}(\gamma\mu_0)J_{i\tau}(\gamma\mu)-J_{i\tau}(\gamma\mu_0)Y_{i\tau}(\gamma\mu) \\ N(\nu)=I_{i\tau}(\gamma\nu)K_{i\tau}(\gamma\nu_1)-I_{i\tau}(\gamma\nu_1)K_{i\tau}(\gamma\nu) \end{cases}$$

$$\Psi(\varphi)=A\frac{Sinh(\gamma(\varphi-\varphi_1))}{Sinh(\gamma(\varphi_2-\varphi_1))}+B\frac{Sinh(\gamma(\varphi_2-\varphi))}{Sinh(\gamma(\varphi_2-\varphi_1))}$$

Que l'on construise les solutions avec les fonctions de Bessel ou de Bessel modifiées d'ordre purement imaginaire, les conditions de finitude de la solution doivent et sont assurées. Par ailleurs le respect de la condition aux limites homogène sur μ= μ0 est assurée par la forme de la fonction

utilisée. De ce fait le spectre des valeurs propres de la variable τ est continu. Celui de la variable γ est déterminé par le respect des conditions aux limites homogènes en ν=ν1 et ν=ν2. Seul le choix 1 permet de mettre en oeuvre une transformation intégrale connue avec noyau de fonctions de Bessel modifiée K, transformation intégrale qui rend compte du caractère continu du spectre de τ, soit avec le noyau de la transformation intégrale de Ya.S.Uflyand-E. A.Yushkova (1965, Solution of the Dirichlet problem for a finite wedge by means of special integral transforms using Bessel functions, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R Vol 164, Number 1, 70-72 en russe), transformation de la famille des transformations de Kontorovich-Lebedev.

Dans ces conditions le spectre de la variable γ est déterminé par les racines de l'équation transcendantale :

$$Y_{i\tau}(\gamma\nu_1)J_{i\tau}(\gamma\nu_2) - J_{i\tau}(\gamma\nu_1)Y_{i\tau}(\gamma\nu_2) = 0$$

Remarque : du fait des formules de connexions des fonctions de Bessel J et Y d'ordre purement imaginaire, on peut tout aussi bien utiliser les parties réelle et imaginaire des fonctions de Bessel J. Et dans ce cas l'équation transcendantale s'écrirait :

$$\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(\gamma\nu_1)\}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(\gamma\nu_2)\} - \mathrm{Im}\{J_{i\tau}(\gamma\nu_1)\}\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(\gamma\nu_2)\} = 0$$

Du fait du caractère oscillatoire de la fonction dans l'équation transcendantale, il existe quelque soit la valeur du paramètre τ positif une infinité de racines discrètes de cette équation transcendantale. La propriété d'orthogonalité des fonctions propres en ν devient unidimensionnelle puisque l'équation différentielle est la suivante :

$$N(\nu) = N_{i\tau}(\gamma,\nu,\nu_1) = J_{i\tau}(\gamma\nu)Y_{i\tau}(\gamma\nu_1) - J_{i\tau}(\gamma\nu_1)Y_{i\tau}(\gamma\nu)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{N_2(\nu)}{\nu}\frac{d}{d\nu}\left(\nu\frac{dN_1(\nu)}{d\nu}\right) + \left(\frac{\tau^2}{\nu^2} + \gamma_1^{\,2}\right)N_1(\nu)N_2(\nu) = 0 \\ &\frac{N_1(\nu)}{\nu}\frac{d}{d\nu}\left(\nu\frac{dN_2(\nu)}{d\nu}\right) + \left(\frac{\tau^2}{\nu^2} + \gamma_2^{\,2}\right)N_1(\nu)N_2(\nu) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\frac{d}{d\nu}\left(\nu\frac{dN_1(\nu)}{d\nu}N_2(\nu) - \nu\frac{dN_2(\nu)}{d\nu}N_1(\nu)\right) + \left(\gamma_1^{\,2} - \gamma_2^{\,2}\right)\nu N_1(\nu)N_2(\nu) = 0 \\ &\Rightarrow \left(\gamma_1^{\,2} - \gamma_2^{\,2}\right)\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\nu N_1(\nu)N_2(\nu) = 0 \Rightarrow \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\nu N_1(\nu)N_2(\nu) = 0 \end{aligned}$$

Il en résulte la construction suivante de la solution du problème :

$$T(\mu,\nu,\varphi) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\,\tau)\left\{\sum_{n=1}^{n=+\infty} \begin{gathered} \left\{A(\tau,\gamma_n,\mu_0)\frac{Sinh(\gamma_n(\varphi-\varphi_1))}{Sinh(\gamma_n(\varphi_2-\varphi_1))} + B(\tau,\gamma_n,\mu_0)\frac{Sinh(\gamma_n(\varphi_2-\varphi))}{Sinh(\gamma_n(\varphi_2-\varphi_1))}\right\}\times \\ \times\frac{M_{i\tau}(\gamma_n,\mu,\mu_0)}{\left|I_{i\tau}(\gamma_n\mu_0)\right|^2}\times\frac{N_{i\tau}(\gamma_n,\nu,\nu_1)}{\left\|N_{i\tau}(\gamma_n,\nu,\nu_1)\right\|^2} \end{gathered}\right\}$$

$$M_{i\tau}(\gamma,\mu,\mu_0) = I_{i\tau}(\gamma\mu)K_{i\tau}(\gamma\mu_0) - I_{i\tau}(\gamma\mu_0)K_{i\tau}(\gamma\mu) \quad N_{i\tau}(\gamma,\nu,\nu_1) = J_{i\tau}(\gamma\nu)Y_{i\tau}(\gamma\nu_1) - J_{i\tau}(\gamma\nu_1)Y_{i\tau}(\gamma\nu) \quad \left\|N_{i\tau}(\gamma_n,\nu,\nu_1)\right\|^2 = \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\nu\left(N_{i\tau}(\gamma_n,\nu,\nu_1)\right)^2$$

L'application des deux conditions aux limites azimutales en utilisant une modification de la transformation d'Uflyand couplée avec un développement en série discrète sur les valeurs propres γ_n donnent :

$$T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_1} = f_1(\mu,\nu) \Rightarrow f_1(\mu,\nu) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\tau)\sum_{n=1}^{n=+\infty} B(\tau,\gamma_n,\mu_0)\frac{M_{i\tau}(\gamma_n,\mu,\mu_0)}{|I_{i\tau}(\gamma_n\mu_0)|^2}\frac{N_{i\tau}(\gamma_n,\nu,\nu_1)}{\|N_{i\tau}(\gamma_n,\nu,\nu_1)\|^2}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_2} = f_2(\mu,\nu) \Rightarrow f_2(\mu,\nu) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\tau)\sum_{n=1}^{n=+\infty} A(\tau,\gamma_n,\mu_0)\frac{M_{i\tau}(\gamma_n,\mu,\mu_0)}{|I_{i\tau}(\gamma_n\mu_0)|^2}\frac{N_{i\tau}(\gamma_n,\nu,\nu_1)}{\|N_{i\tau}(\gamma_n,\nu,\nu_1)\|^2}$$

$$\begin{cases} \tilde{f}(\tau,\gamma_n,\mu_0) = \displaystyle\int_0^{\mu_0} d\mu\ \frac{M_{i\tau}(\gamma_n,\mu,\mu_0)}{\mu}\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\nu f(\mu,\nu) N_{i\tau}(\gamma_n,\nu,\nu_1) \quad \textit{transformée} \\ f(\mu) = \displaystyle\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\tau)\sum_{n=1}^{n=+\infty}\tilde{f}(\tau,\gamma_n,\mu_0)\frac{M_{i\tau}(\gamma_n,\mu,\mu_0)}{|I_{i\tau}(\gamma_n\mu_0)|^2}\frac{N_{i\tau}(\gamma_n,\nu,\nu_1)}{\|N_{i\tau}(\gamma_n,\nu,\nu_1)\|^2} \\ \gamma_n \quad tq \quad N_{i\tau}(\gamma_n,\nu_2,\nu_1) = J_{i\tau}(\gamma_n\nu_2)Y_{i\tau}(\gamma_n\nu_1) - J_{i\tau}(\gamma_n\nu_1)Y_{i\tau}(\gamma_n\nu_2) = 0 \quad \textit{transformée inverse} \end{cases}$$

Ce qui donne la solution formelle du problème :

$$T(\mu,\nu,\varphi) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\tau)\left\{\sum_{n=1}^{n=+\infty} \begin{array}{l} \left\{A(\tau,\gamma_n,\mu_0)\dfrac{Sinh(\gamma_n(\varphi-\varphi_1))}{Sinh(\gamma_n(\varphi_2-\varphi_1))} + B(\tau,\gamma_n,\mu_0)\dfrac{Sinh(\gamma_n(\varphi_2-\varphi))}{Sinh(\gamma_n(\varphi_2-\varphi_1))}\right\}\times \\ \times\dfrac{M_{i\tau}(\gamma_n,\mu,\mu_0)}{|I_{i\tau}(\gamma_n\mu_0)|^2}\times\dfrac{N_{i\tau}(\gamma_n,\nu,\nu_1)}{\|N_{i\tau}(\gamma_n,\nu,\nu_1)\|^2} \end{array}\right\}$$

$$\begin{cases} B(\tau,\gamma_n,\mu_0) = \displaystyle\int_0^{\mu_0} d\mu\ \frac{M_{i\tau}(\gamma_n,\mu,\mu_0)}{\mu}\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\nu f_1(\mu,\nu) N_{i\tau}(\gamma_n,\nu,\nu_1) \\ A(\tau,\gamma_n,\mu_0) = \displaystyle\int_0^{\mu_0} d\mu\ \frac{M_{i\tau}(\gamma_n,\mu,\mu_0)}{\mu}\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\nu f_2(\mu,\nu) N_{i\tau}(\gamma_n,\nu,\nu_1) \\ M_{i\tau}(\gamma,\mu,\mu_0) = I_{i\tau}(\gamma\mu)K_{i\tau}(\gamma\mu_0) - I_{i\tau}(\gamma\mu_0)K_{i\tau}(\gamma\mu) \\ N_{i\tau}(\gamma,\nu,\nu_1) = J_{i\tau}(\gamma\nu)Y_{i\tau}(\gamma\nu_1) - J_{i\tau}(\gamma\nu_1)Y_{i\tau}(\gamma\nu) \qquad \|N_{i\tau}(\gamma_n,\nu,\nu_1)\|^2 = \displaystyle\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\nu(N_{i\tau}(\gamma_n,\nu,\nu_1))^2 \\ \gamma_n \quad tq \quad N_{i\tau}(\gamma_n,\nu_2,\nu_1) = J_{i\tau}(\gamma_n\nu_2)Y_{i\tau}(\gamma_n\nu_1) - J_{i\tau}(\gamma_n\nu_1)Y_{i\tau}(\gamma_n\nu_2) = 0 \end{cases}$$

Tout cela est très beau en théorie, mais quand on commence à construire numériquement la solution, on se rend compte qu'il y a un hic ! Voyons cela dans les étapes de la construction sont les suivantes :

- construction sur le spectre continus des valeur de τ, du spectre discret des valeurs γ_n, satisfaisant à l'équation transcendantale : $Y_{i\tau}(\gamma\nu_1)J_{i\tau}(\gamma\nu_2) - J_{i\tau}(\gamma\nu_1)Y_{i\tau}(\gamma\nu_2) = 0$ *, en vue de produire une fonction d'interpolation du spectre discret $\gamma_n(\tau)$ en fonction du paramètre τ et de l'indice n discret de numérotation des solutions de l'équation transcendantale.*

- somme sur un nombre de termes discrets suffisant et intégration numérique sur l'intervalle de τ de 0 à une valeur maximale τmax (les intégrandes sont fortement décroissants et l'approximation à l'intervalle [0, τmax] peut sembler suffisante) en vue de calculer la solution en tout point de l'espace

Lors de l'élaboration de la fonction des spectres discrets $\gamma_n(\tau)$, il s'avère qu'à partir d'une valeur disons τ0, le spectre $\gamma_n(\tau)$ comporte des valeurs purement imaginaires en nombre restreint, dépendant des valeurs ν_1 et ν_2 du problème aux limites. Et dans ce cas le noyau de la transformée inverse d'Uflyand , devient une fonction de Bessel de première espèce d'ordre purement imaginaire et la formule d'inversion devient invalide :

$$M_{i\tau}(\gamma_n(\tau),\mu,\mu_0) = I_{i\tau}(\gamma_n(\tau)\mu)K_{i\tau}(\gamma_n(\tau)\mu_0) - I_{i\tau}(\gamma_n(\tau)\mu_0)K_{i\tau}(\gamma_n(\tau)\mu)$$
$$\gamma_n(\tau) = i\lambda_n(\tau) \rightarrow M_{i\tau}(\gamma_n(\tau),\mu,\mu_0) \propto J_{i\tau}(\lambda_n(\tau)\mu)Y_{i\tau}(\lambda_n(\tau)\mu_0) - J_{i\tau}(\lambda_n(\tau)\mu_0)Y_{i\tau}(\lambda_n(\tau)\mu)$$

Autrement dit, il y a un fort risque que le développement analytique de la solution ne soit plus licite. Le contournement de ce problème majeure est un sujet d'étude en soit. Une telle solution mettrait en jeu la séparation du spectre discret infini des valeurs propres réels, et du spectre discret fini des valeurs propres purement imaginaires, avec deux jeux respectifs de fonctions propres, comme suit :

$$\tau \rightarrow \textit{Spectre discret de valeur propres} \quad = \{\gamma_n(\tau) / \gamma_n(\tau) \in \mathbf{R}, n = \{1,...,\infty\}\} \cup \{i\lambda_n(\tau) / \lambda_l(\tau) \in \mathbf{R}, l = \{1,...,L\}\}$$

$$\textit{vp réelles} \quad \begin{cases} N_{i\tau}(\gamma_n(\tau),\nu,\nu_1) = \mathrm{Re}\{J_{i\tau}(\gamma_n(\tau)\nu)\}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(\gamma_n(\tau)\nu_1)\} - \mathrm{Re}\{J_{i\tau}(\gamma_n(\tau)\nu_1)\}\mathrm{Im}\{Y_{i\tau}(\gamma_n(\tau)\nu)\} \\ \gamma_n(\tau) \quad tq \quad N_{i\tau}(\gamma_n(\tau),\nu_2,\nu_1) = \mathrm{Re}\{J_{i\tau}(\gamma_n(\tau)\nu_2)\}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(\gamma_n(\tau)\nu_1)\} - \mathrm{Re}\{J_{i\tau}(\gamma_n(\tau)\nu_1)\}\mathrm{Im}\{Y_{i\tau}(\gamma_n(\tau)\nu_2)\} = 0 \\ \|N_{i\tau}(\gamma_n(\tau),\nu,\nu_1)\|^2 = \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\nu(N_{i\tau}(\gamma_n(\tau),\nu,\nu_1))^2 \end{cases}$$

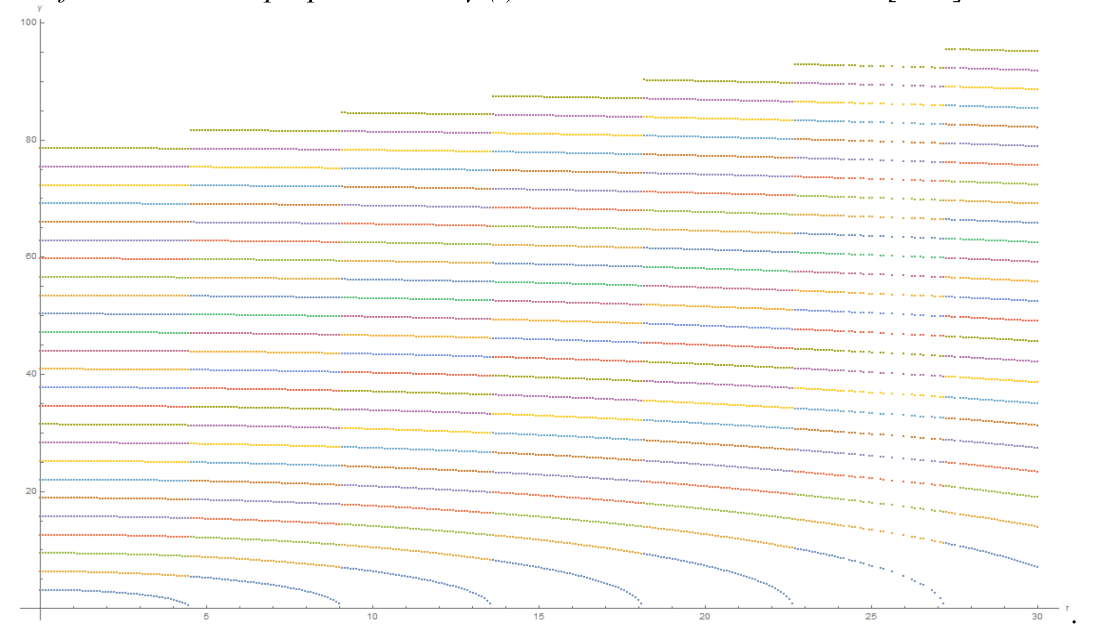
$$\textit{vp imaginaires} \quad \begin{cases} \widetilde{N}_{i\tau}(\lambda_l(\tau),\nu,\nu_1) = I_{i\tau}(\lambda_l(\tau)\nu)K_{i\tau}(\lambda_l(\tau)\nu_1) - I_{i\tau}(\lambda_l(\tau)\nu_1)K_{i\tau}(\lambda_l(\tau)\nu) \\ \|\widetilde{N}_{i\tau}(\lambda_l(\tau),\nu,\nu_1)\|^2 = \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\nu(\widetilde{N}_{i\tau}(\lambda_l(\tau),\nu,\nu_1))^2 \\ \lambda_l(\tau) \quad tq \quad \widetilde{N}_{i\tau}(\gamma_l(\tau),\nu_2,\nu_1) = I_{i\tau}(\lambda_l(\tau)\nu_2)K_{i\tau}(\lambda_l(\tau)\nu_1) - I_{i\tau}(\lambda_l(\tau)\nu_1)K_{i\tau}(\lambda_l(\tau)\nu_2) = 0 \end{cases}$$

Théoriquement ces fonctions propres sont toutes orthogonales entre-elles, et forment un système complet permettant de représenter toute fonction bornée dans l'intervalle $[\nu_1, \nu_2]$. Les propriétés de complétude et d'orthogonalité s'expriment sous la forme du développement en série d'une fonction f quelconque :

$$f(\nu,\tau) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{N_{i\tau}(\gamma_n(\tau),\nu,\nu_1)}{\|N_{i\tau}(\gamma_n(\tau),\nu,\nu_1)\|^2} \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\nu\, f(\nu,\tau) N_{i\tau}(\gamma_n(\tau),\nu,\nu_1) + \sum_{l=1}^{l=L} \frac{\widetilde{N}_{i\tau}(\lambda_l(\tau),\nu,\nu_1)}{\|\widetilde{N}_{i\tau}(\lambda_l(\tau),\nu,\nu_1)\|^2} \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\nu\, f(\nu,\tau) \widetilde{N}_{i\tau}(\lambda_l(\tau),\nu,\nu_1)$$

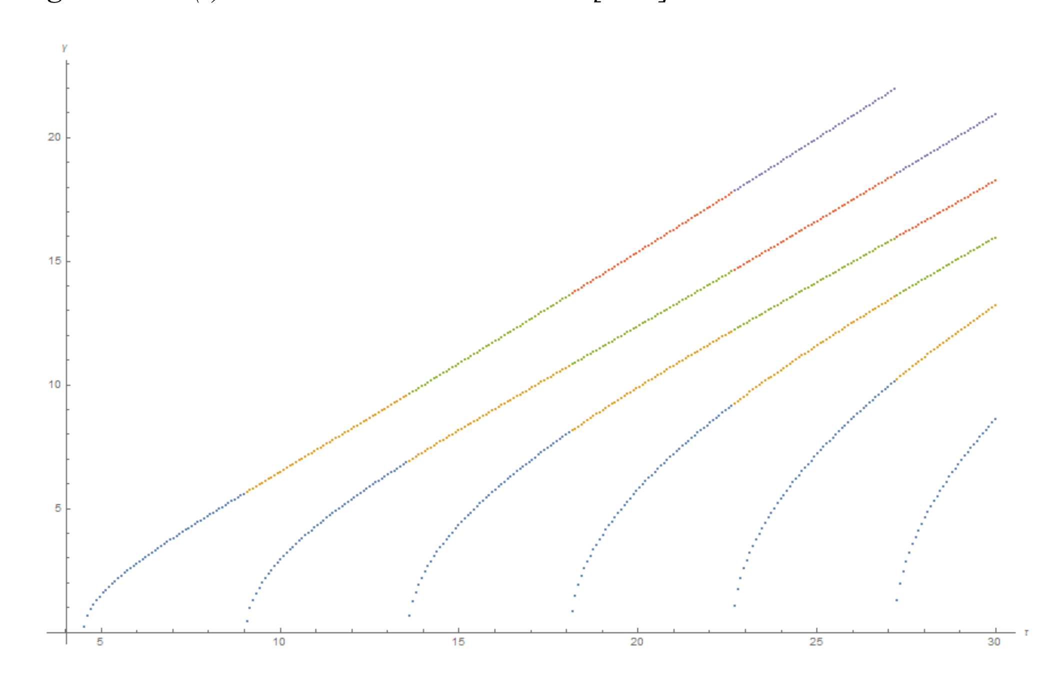
$$\begin{cases} \forall \gamma_{n1}(\tau), \gamma_{n2}(\tau) \quad \gamma_{n1}(\tau) \neq \gamma_{n2}(\tau) \quad \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\nu\; N_{i\tau}(\gamma_{n1}(\tau),\nu,\nu_1) N_{i\tau}(\gamma_{n2}(\tau),\nu,\nu_1) = 0 \\ \forall \lambda_{l1}(\tau), \lambda_{l2}(\tau) \quad \lambda_{l1}(\tau) \neq \lambda_{l2}(\tau) \quad \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\nu\; \widetilde{N}_{i\tau}(\lambda_{l1}(\tau),\nu,\nu_1) \widetilde{N}_{i\tau}(\lambda_{l2}(\tau),\nu,\nu_1) = 0 \\ \forall \gamma_{n1}(\tau), \lambda_{l2}(\tau) \quad \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\nu\; N_{i\tau}(\gamma_{n1}(\tau),\nu,\nu_1) \widetilde{N}_{i\tau}(\lambda_{l2}(\tau),\nu,\nu_1) = 0 \end{cases}$$

Avec les valeurs $v_1 = 1, v_2 = 2$, voici sur le graphique suivant représenté en abscisse τ et en ordonnée le spectre infini des valeurs propres réelles $\gamma_n(\tau)$, construit sur l'intervalle $\tau \in [0,30]$:

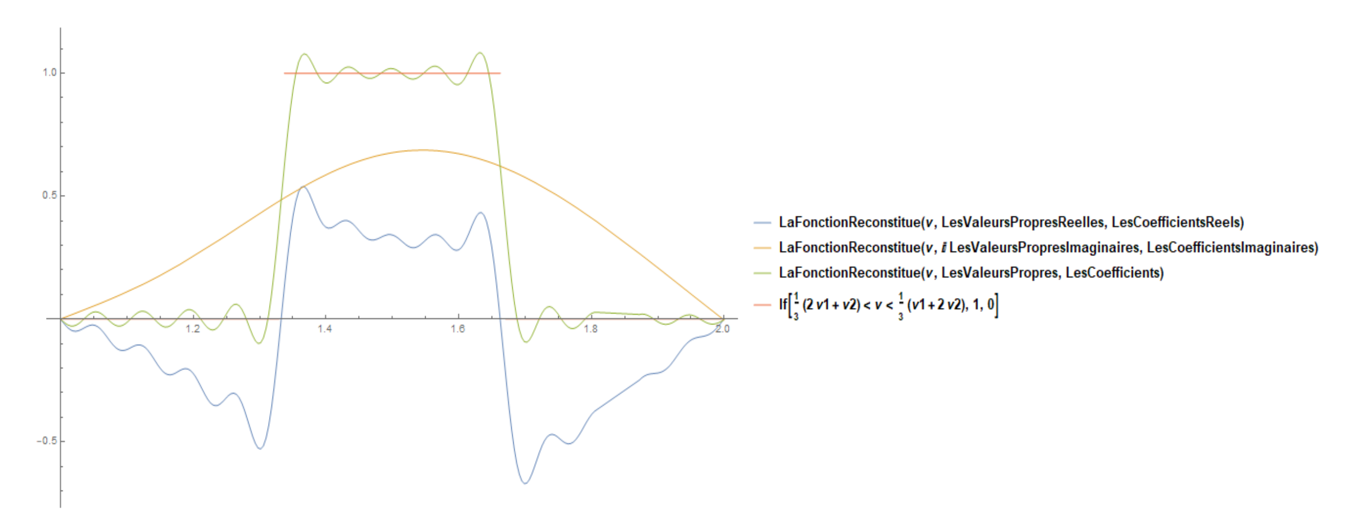


.

Et sur le graphique suivant représenté en abscisse τ et en ordonnée le spectre fini des valeurs propres imaginaires $i\lambda_n(\tau)$, construit sur l'intervalle $\tau \in [0,30]$:

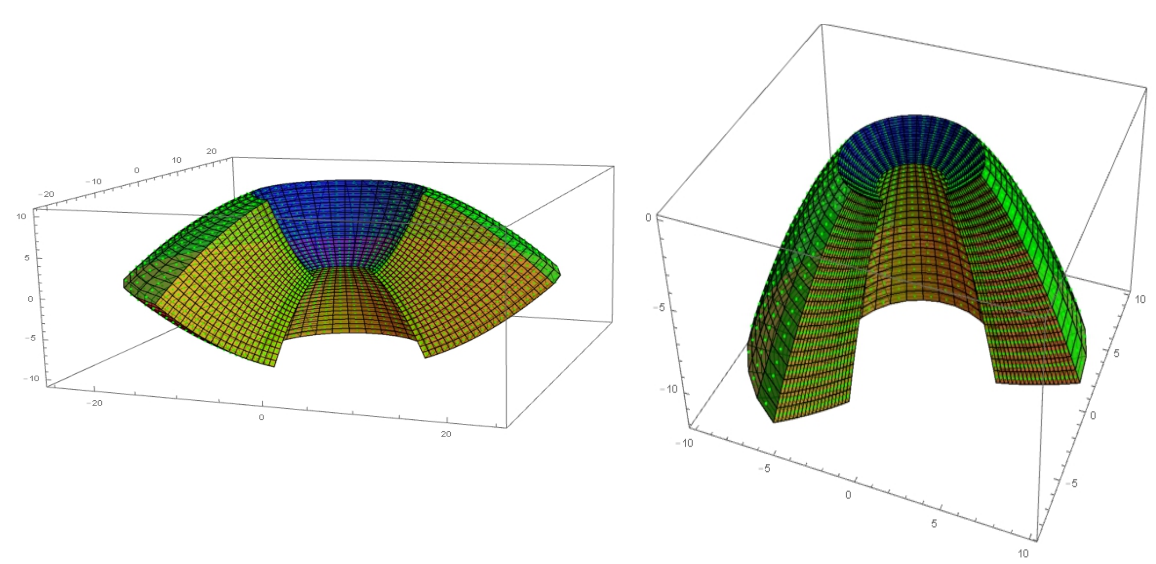


En construisant les fonctions d'interpolation adéquat, on a donc défini un jeu de fonctions propres sur l'intervalle τ€[0,30], sur lequel par exemple on peut illustrer la relation de complétude en reconstituant par exemple un fonction palier entre $(2v_1 + v_2)/3$ et $(v_1 + 2v_2)/3$:



Le problème c'est que la transformation d'Uflyand avec un paramètre γ imaginaire, soit construite avec des fonctions de Bessel J d'ordre purement imaginaire, n'est plus inversible. Donc le développement proposé n'est plus licite et le problème de construire une solution reste posé.

Secteur de paraboloïde « creux » de révolution soumis à des conditions aux limites dépendantes ou indépendantes de l'angle azimutal



Soit un secteur paraboloïde de révolution creux $(\mu,\nu,\varphi)\in\Omega=[\mu_1,\mu_2]\times[\nu_1,\nu_2]\times[0,\varphi_0]$ *dans lequel les conditions dépendent maintenant de l'angle azimutal sur le paraboloïde de révolution :*

$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}\right)+\frac{1}{\mu^2\nu^2}\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

$$(\mu,\nu,\varphi)\in\Omega=[\mu_1,\mu_2]\times[\nu_1,\nu_2]\times[0,2\pi]\quad T(\mu,\nu,\varphi)\ \textit{fini}$$

$$\textit{Cas envisagés}: \textit{Dirichlet ou Neumann}$$

$$\Rightarrow \alpha^{\mu}_{\mu_1},\alpha^{\mu}_{\mu_2}\in\{0,1\}\quad \alpha^{\nu}_{\nu_1},\alpha^{\nu}_{\nu_2}\in\{0,1\}\quad \alpha^{\varphi}_{0},\alpha^{\varphi}_{\varphi_0}\in\{0,1\}\quad \beta^{\mu}_{\mu_1},\beta^{\mu}_{\mu_2}\in\{0,1\}\quad \beta^{\nu}_{\nu_1},\beta^{\nu}_{\nu_2}\in\{0,1\}\quad \beta^{\varphi}_{0},\beta^{\varphi}_{\varphi_0}\in\{0,1\}$$

$$\textit{Et}\quad \alpha^{\mu}_{\mu_1}=1-\beta^{\mu}_{\mu_1}\quad \alpha^{\mu}_{\mu_2}=1-\beta^{\mu}_{\mu_2}\quad \alpha^{\nu}_{\nu_1}=1-\beta^{\nu}_{\nu_1}\quad \alpha^{\nu}_{\nu_2}=1-\beta^{\nu}_{\nu_2}\quad \alpha^{\varphi}_{0}=1-\beta^{\varphi}_{0}\quad \alpha^{\varphi}_{\varphi_0}=1-\beta^{\varphi}_{\varphi_0}$$

$$\left.\frac{\alpha^{\mu}_{\mu_1}}{\sqrt{{\mu_1}^2+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}-\beta^{\mu}_{\mu_1}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\mu=\mu_1}=-f^{\mu}_{\mu_1}(\nu,\varphi)\quad \left.\frac{\alpha^{\mu}_{\mu_2}}{\sqrt{{\mu_2}^2+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta^{\mu}_{\mu_2}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\mu=\mu_2}=f^{\mu}_{\mu_2}(\nu,\varphi)$$

$$\left.\frac{\alpha^{\nu}_{\nu_1}}{\sqrt{\mu^2+{\nu_1}^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta^{\nu}_{\nu_1}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_1}=-f^{\nu}_{\nu_1}(\mu,\varphi)\quad \left.\frac{\alpha^{\nu}_{\nu_2}}{\sqrt{\mu^2+{\nu_2}^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta^{\nu}_{\nu_2}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_2}=f^{\nu}_{\nu_2}(\mu,\varphi)$$

$$\left.\frac{\alpha^{\varphi}_{0}}{\mu\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta^{\varphi}_{0}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\varphi=0}=-f^{\varphi}_{0}(\mu,\nu)\qquad \left.\frac{\alpha^{\varphi}_{\varphi_0}}{\mu\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta^{\varphi}_{\varphi_0}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\varphi=\varphi_0}=f^{\varphi}_{\varphi_0}(\mu,\nu)$$

Que l'on peut scinder en trois types de problèmes :
- le problème inhomogène en μ, homogène dans les deux autres dimensions
- le problème inhomogène en ν, homogène dans les deux autres dimensions
- le problème inhomogène en ϕ, homogène dans les deux autres dimensions

On utilisera la simplification des coefficients des conditions aux limites homogènes puisque l'on envisage uniquement des conditions de Dirichlet ou de Neumann.

Le problème inhomogène en μ sur le secteur de paraboloïde de révolution creux

Il s'agit du problème suivant :

$$\left.\frac{\alpha_{\mu_1}^{\mu}}{\sqrt{\mu_1^{\,2}+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}-\beta_{\mu_1}^{\mu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\mu=\mu_1}=-f_{\mu_1}^{\mu}(\nu,\varphi)\quad \left.\frac{\alpha_{\mu_2}^{\mu}}{\sqrt{\mu_2^{\,2}+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta_{\mu_2}^{\mu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\mu=\mu_2}=f_{\mu_2}^{\mu}(\nu,\varphi)$$

$$\left.\alpha_{\nu_1}^{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta_{\nu_1}^{\nu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_1}=0\quad \left.\alpha_{\nu_2}^{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta_{\nu_2}^{\nu}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\nu=\nu_2}=0$$

$$\left.\alpha_{0}^{\varphi}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta_{0}^{\varphi}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\varphi=0}=0\qquad \left.\alpha_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta_{\varphi_0}^{\varphi}T(\mu,\nu,\varphi)\right|_{\varphi=\varphi_0}=0$$

Si l'on commence par les fonctions azimutales sur un secteur d'angle ϕ0, elles ont la forme connue et déjà calculée dans d'autres configurations géométriques (le cylindre par exemple) :

$$\Phi_{n_\varphi}(\varphi)=\alpha_0^{\varphi}\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi\right)+\beta_0^{\varphi}Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi\right)$$

$$\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\ \textit{valeurs propres solution de}\quad Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\left(\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\right)^2\alpha_0^{\varphi}\alpha_{\varphi_0}^{\varphi}-\beta_0^{\varphi}\beta_{\varphi_0}^{\varphi}\right)=\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\left(\beta_{\varphi_0}^{\varphi}\alpha_0^{\varphi}+\beta_0^{\varphi}\alpha_{\varphi_0}^{\varphi}\right)$$

$$\left\|\Phi_{n_\varphi}(\varphi)\right\|^2=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\theta_0\left(\left(\alpha_0^{\varphi}\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)+\beta_0^{\varphi}Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\right)^2+\left(\alpha_0^{\varphi}\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)-\beta_0^{\varphi}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\right)^2\right)\\ +\frac{1}{\lambda_{n_\theta}^{\theta}}\left(\alpha_0^{\varphi}\lambda_{n_\theta}^{\theta}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)+\beta_0^{\varphi}Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\right)\left(\alpha_0^{\varphi}\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)-\beta_0^{\varphi}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\right)+\alpha_0^{\varphi}\beta_0^{\varphi}\end{array}\right]$$

D'après tous les calculs déjà réalisés, les fonctions propres en ν sont les suivantes :

$$N_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}(\nu)=\frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}-\frac{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}$$

$$\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\quad tq\quad \frac{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_2\right)+\beta_{\nu_2}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_2\right)}=\frac{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_2\right)+\beta_{\nu_2}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_2\right)}$$

$$N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)=\frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}-\frac{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}$$

$$N_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)=\frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\nu_2\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}-\frac{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\nu_2\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}$$

$$\frac{N_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}{}'(\nu_1)}{\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}}=D_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}(\nu_1)=\frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}-\frac{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\mu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}$$

$$\frac{N_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}{}'(\nu_2)}{\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}}=D_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}(\nu_2)=\frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\nu_2\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}-\frac{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\,\nu_2\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\nu_1\right)}$$

$$\left\|N_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}(\nu)\right\|^2=\frac{\nu_2^{\,2}\left(\left(D_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}(\nu_2)\right)^2+\left(N_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}(\nu_2)\right)^2\left(1-\frac{\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\right)^2}{\nu_2^{\,2}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\right)^2}\right)\right)-\nu_1^{\,2}\left(\left(D_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}(\nu_1)\right)^2+\left(N_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}(\nu_1)\right)^2\left(1-\frac{\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\right)^2}{\nu_1^{\,2}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}\right)^2}\right)\right)}{2}.$$

Les fonctions en μ sont les suivantes :

$$M^{0,\mu_2}_{n_\varphi,n_\nu}(\mu)=\frac{I_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu\right)}{\alpha^\mu_{\mu_1}\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}I_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}'\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu_1\right)-\beta^\mu_{\mu_1}I_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu_1\right)}-\frac{K_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu\right)}{\alpha^\mu_{\mu_1}\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}K_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}'\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu_1\right)-\beta^\mu_{\mu_1}K_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu_1\right)}$$

$$M^{0,\mu_2}_{n_\varphi,n_\nu}{}'(\mu)=\frac{I_m'\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu\right)}{\alpha^\mu_{\mu_1}\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}I_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}'\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu_1\right)-\beta^\mu_{\mu_1}I_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu_1\right)}-\frac{K_m'\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu\right)}{\alpha^\mu_{\mu_1}\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}K_m'\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu_1\right)-\beta^\mu_{\mu_1}K_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu_1\right)}$$

$$M^{\mu_1,0}_{n_\varphi,n_\nu}(\mu)=\frac{I_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu\right)}{\alpha^\mu_{\mu_2}\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}I_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}'\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu_2\right)+\beta^\mu_{\mu_2}I_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu_2\right)}-\frac{K_m\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu\right)}{\alpha^\mu_{\mu_2}\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}K_m'\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu_2\right)+\beta^\mu_{\mu_2}K_m\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu_2\right)}$$

$$M^{\mu_1,0}_{n_\varphi,n_\nu}{}'(\mu)=\frac{I_m'\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu\right)}{\alpha^\mu_{\mu_2}\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}I_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}'\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu_2\right)+\beta^\mu_{\mu_2}I_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu_2\right)}-\frac{K_m'\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu\right)}{\alpha^\mu_{\mu_2}\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}K_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}'\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu_2\right)+\beta^\mu_{\mu_2}K_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\nu_{n_\varphi,n_\nu}\mu_2\right)}$$

Les intégrales dérivant des conditions inhomogènes en μ_1 et μ_2, ainsi que la solution deviennent :

$$A^{\mu_1}_{n_\varphi,n_\nu}=\frac{\displaystyle\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\nu\,\frac{N^\nu_{n_\varphi,n_\nu}(\nu)\sqrt{\mu_1^{\,2}+\nu^2}\displaystyle\int_0^{\varphi_0}d\varphi\,f^\mu_{\mu_1}(\nu,\varphi)\Phi_{n_\varphi}(\varphi)}{\left(\sqrt{\mu_1^{\,2}+\nu^2}\beta^\mu_{\mu_1}M^{\mu_1,0}_{n_\varphi,n_\nu}(\mu_1)-\alpha^\mu_{\mu_1}M^{\mu_1,0}_{n_\varphi,n_\nu}{}'(\mu_1)\right)}}{\left\|N^\nu_{n_\varphi,n_\nu}(\nu)\right\|^2\left\|\Phi_{n_\varphi}(\varphi)\right\|^2}$$

$$A^{\mu_2}_{n_\varphi,n_\nu}=\frac{\displaystyle\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\nu\,\frac{N^\nu_{n_\varphi,n_\nu}(\nu)\sqrt{\mu_2^{\,2}+\nu^2}\displaystyle\int_0^{\varphi_0}d\varphi\,f^\mu_{\mu_2}(\nu,\varphi)\Phi_{n_\varphi}(\varphi)}{\left(\sqrt{\mu_2^{\,2}+\nu^2}\beta^\mu_{\mu_2}M^{0,\mu_2}_{n_\varphi,n_\nu}(\mu_2)+\alpha^\mu_{\mu_2}M^{0,\mu_2}_{n_\varphi,n_\nu}{}'(\mu_2)\right)}}{\left\|N^\nu_{n_\varphi,n_\nu}(\nu)\right\|^2\left\|\Phi_{n_\varphi}(\varphi)\right\|^2}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{n_\varphi=0}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty}\left(A^{\mu_1}_{n_\varphi,n_\nu}M^{\mu_1,0}_{n_\varphi,n_\nu}+A^{\mu_2}_{n_\varphi,n_\nu}M^{0,\mu_2}_{n_\varphi,n_\nu}(\mu)\right)N^\nu_{n_\varphi,n_\nu}(\nu)\Phi_{n_\varphi}(\varphi)$$

Le problème inhomogène en v sur le secteur de paraboloïde de révolution creux

Il s'agit du problème suivant :

$$\alpha_{\mu_1}^{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}-\beta_{\mu_1}^{\mu}T(\mu,\nu,\varphi)\bigg|_{\mu=\mu_1}=0\quad\alpha_{\mu_2}^{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta_{\mu_2}^{\mu}T(\mu,\nu,\varphi)\bigg|_{\mu=\mu_2}=0$$

$$\frac{\alpha_{\nu_1}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+\nu_1^{\,2}}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta_{\nu_1}^{\nu}T(\mu,\nu,\varphi)\bigg|_{\nu=\nu_1}=-f_{\nu_1}^{\nu}(\mu,\varphi)\quad\frac{\alpha_{\nu_2}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+\nu_2^{\,2}}}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta_{\nu_2}^{\nu}T(\mu,\nu,\varphi)\bigg|_{\nu=\nu_2}=f_{\nu_2}^{\nu}(\mu,\varphi)$$

$$\alpha_0^{\varphi}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta_0^{\varphi}T(\mu,\nu,\varphi)\bigg|_{\varphi=0}=0\qquad\alpha_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta_{\varphi_0}^{\varphi}T(\mu,\nu,\varphi)\bigg|_{\varphi=\varphi_0}=0$$

Si l'on commence par les fonctions azimutales sur un secteur d'angle ϕ_0, elles ont la forme connue et déjà calculée dans d'autres configurations géométriques (le cylindre par exemple) :

$$\Phi_{n_\varphi}(\varphi)=\alpha_0^{\varphi}\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi\right)+\beta_0^{\varphi}Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi\right)$$

$$\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\ \text{valeurs propres solution de}\quad Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\left(\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\right)^2\alpha_0^{\varphi}\alpha_{\varphi_0}^{\varphi}-\beta_0^{\varphi}\beta_{\varphi_0}^{\varphi}\right)=\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\left(\beta_{\varphi_0}^{\varphi}\alpha_0^{\varphi}+\beta_0^{\varphi}\alpha_{\varphi_0}^{\varphi}\right)$$

$$\left\|\Phi_{n_\varphi}(\varphi)\right\|^2=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\theta_0\left(\left(\alpha_0^{\varphi}\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)+\beta_0^{\varphi}Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\right)^2+\left(\alpha_0^{\varphi}\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)-\beta_0^{\varphi}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\right)^2\right)\\+\frac{1}{\lambda_{n_\theta}^{\theta}}\left(\alpha_0^{\theta}\lambda_{n_\theta}^{\theta}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)+\beta_0^{\varphi}Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\right)\left(\alpha_0^{\varphi}\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)-\beta_0^{\varphi}Cos\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi_0\right)\right)+\alpha_0^{\varphi}\beta_0^{\varphi}\end{array}\right]$$

D'après tous les calculs déjà réalisés, les fonctions propres en μ sont les suivantes :

$$M_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\mu)=\frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)}-\frac{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)}$$

$$\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\quad tq\quad\frac{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_2\right)+\beta_{\mu_2}^{\mu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_2\right)}=\frac{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_2\right)+\beta_{\mu_2}^{\mu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_2\right)}$$

$$M_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\mu_1)=\frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)}-\frac{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{n_\varphi,n_\nu}^{\nu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)}$$

$$M_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\mu_2)=\frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_2\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)}-\frac{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_2\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)}$$

$$\frac{M_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}{}'(\mu_1)}{\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}}=D_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\mu_1)=\frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)}-\frac{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)}$$

$$\frac{M_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}{}'(\mu_2)}{\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}}=D_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\mu_2)=\frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_2\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)}-\frac{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_2\right)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)-\beta_{\mu_1}^{\mu}Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)}$$

$$\left\|M_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\mu)\right\|^2=\frac{\mu_2^{\,2}\left(\left(D_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\mu_2)\right)^2+\left(M_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\mu_2)\right)^2\left(1-\frac{\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\right)^2}{\mu_2^{\,2}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\right)^2}\right)\right)-\mu_1^{\,2}\left(\left(D_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\mu_1)\right)^2+\left(M_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\mu_1)\right)^2\left(1-\frac{\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\right)^2}{\mu_1^{\,2}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\right)^2}\right)\right)}{2}$$

.

Les fonctions en v sont les suivantes :

$$N^{0,\nu_2}_{n_\varphi,n_\mu}(\nu)=\frac{I_{\lambda^{\varphi}_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu\right)}{\alpha^{\nu}_{\nu_1}\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}I_{\lambda^{\varphi}_{n_\varphi}}'\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu_1\right)-\beta^{\nu}_{\nu_1}I_{\lambda^{\varphi}_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu_1\right)}-\frac{K_{\lambda^{\varphi}_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu\right)}{\alpha^{\nu}_{\nu_1}\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}K_{\lambda^{\varphi}_{n_\varphi}}'\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu_1\right)-\beta^{\nu}_{\nu_1}K_{\lambda^{\varphi}_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu_1\right)}$$

$$N^{0,\nu_2}_{n_\varphi,n_\mu}{}'(\nu)=\frac{I_m'\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu\right)}{\alpha^{\nu}_{\nu_1}\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}I_{\lambda^{\varphi}_{n_\varphi}}'\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu_1\right)-\beta^{\nu}_{\nu_1}I_{\lambda^{\varphi}_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu_1\right)}-\frac{K_m'\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu\right)}{\alpha^{\nu}_{\nu_1}\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}K_m'\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu_1\right)-\beta^{\nu}_{\nu_1}K_{\lambda^{\varphi}_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu_1\right)}$$

$$N^{\nu_1,0}_{n_\varphi,n_\mu}(\nu)=\frac{I_{\lambda^{\varphi}_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu\right)}{\alpha^{\nu}_{\nu_2}\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}I_{\lambda^{\varphi}_{n_\varphi}}'\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu_2\right)+\beta^{\nu}_{\nu_2}I_{\lambda^{\varphi}_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu_2\right)}-\frac{K_m\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu\right)}{\alpha^{\nu}_{\nu_2}\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}K_m'\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu_2\right)+\beta^{\nu}_{\nu_2}K_m\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu_2\right)}$$

$$N^{\nu_1,0}_{n_\varphi,n_\mu}{}'(\nu)=\frac{I_m'\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu\right)}{\alpha^{\nu}_{\nu_2}\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}I_{\lambda^{\varphi}_{n_\varphi}}'\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu_2\right)+\beta^{\nu}_{\nu_2}I_{\lambda^{\varphi}_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu_2\right)}-\frac{K_m'\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu\right)}{\alpha^{\nu}_{\nu_2}\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}K_{\lambda^{\varphi}_{n_\varphi}}'\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu_2\right)+\beta^{\nu}_{\nu_2}K_{\lambda^{\varphi}_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}\nu_2\right)}$$

Les intégrales dérivant des conditions inhomogènes en v_1 et v_2:

$$A^{\nu_1}_{n_\varphi,n_\mu}=\frac{\displaystyle\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\,\frac{M^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}(\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_1{}^2}\displaystyle\int_0^{\varphi_0}d\varphi\,f^{\nu}_{\nu_1}(\mu,\varphi)\Phi_{n_\varphi}(\varphi)}{\left(\sqrt{\mu^2+\nu_1{}^2}\beta^{\nu}_{\nu_1}N^{\nu_1,0}_{n_\varphi,n_\mu}(\nu_1)-\alpha^{\nu}_{\nu_1}N^{\nu_1,0}_{n_\varphi,n_\mu}{}'(\nu_1)\right)}}{\left\|M^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}(\mu)\right\|^2\left\|\Phi_{n_\varphi}(\varphi)\right\|^2}$$

$$A^{\nu_2}_{n_\varphi,n_\mu}=\frac{\displaystyle\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\,\mu\,\frac{M^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}(\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_2{}^2}\displaystyle\int_0^{\varphi_0}d\varphi\,f^{\nu}_{\nu_2}(\mu,\varphi)\Phi_{n_\varphi}(\varphi)}{\left(\sqrt{\mu^2+\nu_2{}^2}\beta^{\nu}_{\nu_2}N^{0,\nu_2}_{n_\varphi,n_\mu}(\nu_2)+\alpha^{\nu}_{\nu_2}N^{0,\nu_2}_{n_\varphi,n_\mu}{}'(\nu_2)\right)}}{\left\|M^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}(\mu)\right\|^2\left\|\Phi_{n_\varphi}(\varphi)\right\|^2}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{n_\varphi=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}\left(A^{\nu_1}_{n_\varphi,n_\mu}N^{\nu_1,0}_{n_\varphi,n_\mu}(\nu)+A^{\mu_2}_{n_\varphi,n_\mu}N^{0,\nu_2}_{n_\varphi,n_\mu}(\nu)\right)M^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}(\mu)\Phi_{n_\varphi}(\varphi)$$

Exemple pour les problèmes inhomogènes en µ ou v sur le secteur de paraboloïde de révolution creux

On choisit un paraboloïde de révolution creux parfaitement symétrique. Soit µ1=v1 et µ2=v2. Soit les dimensions du « rayon » externe définie comme une lentille parabolique :

$$c=1\quad \mu_1=\nu_1=\gamma_1\quad \mu_2=\nu_2=\gamma_2\quad l_z=\frac{c\gamma_2{}^2}{2}\Rightarrow\gamma_2=\sqrt{2l_z}$$

Prenons un problème inhomogène en v, dont les conditions aux limites homogènes sont de Dirichlet : $T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\mu=\gamma_1}=T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\mu=\gamma_2}=0\quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=0}=T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_0}=0$

$$T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\gamma_1}=0\quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\gamma_2}=T_0$$

Les fonctions propres azimutales et les fonctions en μ et ν sont les suivantes :

$$\Phi_{n_\varphi}(\varphi)=Sin\left(\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}\varphi\right) \quad valeurs\ propres \quad \lambda_{n_\varphi}^{\varphi}=\frac{n_\varphi\pi}{\varphi_0} \qquad \left\|\Phi_{n_\varphi}(\varphi)\right\|^2=\frac{\varphi_0}{2}$$

$$M_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\mu)=\frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu\right)}{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\gamma_1\right)}-\frac{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu\right)}{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\gamma_1\right)} \qquad \lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu} \quad tq \quad \frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\gamma_1\right)}{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\gamma_2\right)}=\frac{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\gamma_1\right)}{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\gamma_2\right)}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{M_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}{}'(\gamma_1)}{\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}}&=D_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\gamma_1)=\frac{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\gamma_1\right)}{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\mu_1\right)}-\frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\gamma_1\right)}{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\gamma_1\right)}\\ \frac{M_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}{}'(\gamma_2)}{\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}}&=D_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\gamma_2)=\frac{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\gamma_2\right)}{Y_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\gamma_1\right)}-\frac{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}{}'\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\gamma_2\right)}{J_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\gamma_1\right)}\end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned}\left\|M_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\mu)\right\|^2&=\frac{\gamma_2{}^2\left(D_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\gamma_2)\right)^2-\gamma_1{}^2\left(D_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}(\gamma_1)\right)^2}{2}\\ N_{n_\varphi,n_\mu}^{0,\nu_2}(\nu)&=\frac{K_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu\right)}{K_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\gamma_1\right)}-\frac{I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\nu\right)}{I_{\lambda_{n_\varphi}^{\varphi}}\left(\lambda_{n_\varphi,n_\mu}^{\mu}\gamma_1\right)}\end{aligned}\right.$$

Les intégrales dérivant des conditions inhomogènes en ν_1 et ν_2 en les exprimant à l'aide des fonctions de Lommel deviennent :

$$A_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\nu_2}=\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}d\mu\,\mu M_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}(\mu)=\frac{\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}d\mu\,\mu J_{\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\mu\right)}{J_{\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\gamma_1\right)}-\frac{\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}d\mu\,\mu Y_{\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\mu\right)}{Y_{\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\gamma_1\right)}$$

$$\int d\mu\,\mu^{\alpha}J_\tau(\mu)=\mu\left\{(\alpha+\tau-1)J_\tau(\mu)S_{\alpha-1,\tau-1}(\mu)-J_{\tau-1}(\mu)S_{\alpha,\tau}(\mu)\right\}$$

$$\Rightarrow\int d\mu\,\mu^{\alpha}J_\tau(\kappa\mu)=\kappa^{-\alpha}\mu\left\{(\alpha+\tau-1)J_\tau(\kappa\mu)S_{\alpha-1,\tau-1}(\kappa\mu)-J_{\tau-1}(\kappa\mu)S_{\alpha,\tau}(\kappa\mu)\right\}\Leftarrow \quad \alpha=1 \quad \kappa=\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu} \quad \tau=\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}$$

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}d\mu\,\mu J_{\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\mu\right)=\frac{\left[\mu\left\{\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}J_{\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\mu\right)S_{0,\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}-1}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\mu\right)-J_{\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}-1}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\mu\right)S_{1,\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\mu\right)\right\}\right]_{\gamma_1}^{\gamma_2}}{\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}}$$

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}d\mu\,\mu Y_{\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\mu\right)=\frac{\left[\mu\left\{\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}Y_{\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\mu\right)S_{0,\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}-1}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\mu\right)-Y_{\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}-1}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\mu\right)S_{1,\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\mu\right)\right\}\right]_{\gamma_1}^{\gamma_2}}{\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}}$$

Ce qui donne la solution du problème :

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\frac{4T_0}{\pi}\sum_{n_\varphi=0}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}\frac{A_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu_2}}{2n_\varphi+1}\frac{\dfrac{K_{\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\nu\right)}{K_{\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\gamma_1\right)}-\dfrac{I_{\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\nu\right)}{I_{\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\gamma_1\right)}}{\dfrac{K_{\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\gamma_2\right)}{K_{\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\gamma_1\right)}-\dfrac{I_{\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\gamma_2\right)}{I_{\lambda_{2n_\varphi+1}^{\varphi}}\left(\lambda_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}\gamma_1\right)}}\frac{M_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}(\mu)}{\left\|M_{2n_\varphi+1,n_\mu}^{\mu}(\mu)\right\|^2}Sin\left((2n_\varphi+1)\pi\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)$$

.

Prenons maintenant une fonction limite en palier sur l'angle azimutal :

$$T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\mu=\gamma_1} = T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\mu=\gamma_2} = 0 \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=0} = T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\gamma_1} = 0 \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\gamma_2} = \begin{cases} 1 & \varphi \in [\varphi_1,\varphi_2] \\ 0 & \varphi \notin [\varphi_1,\varphi_2] \end{cases}$$

La solution s'écrit :

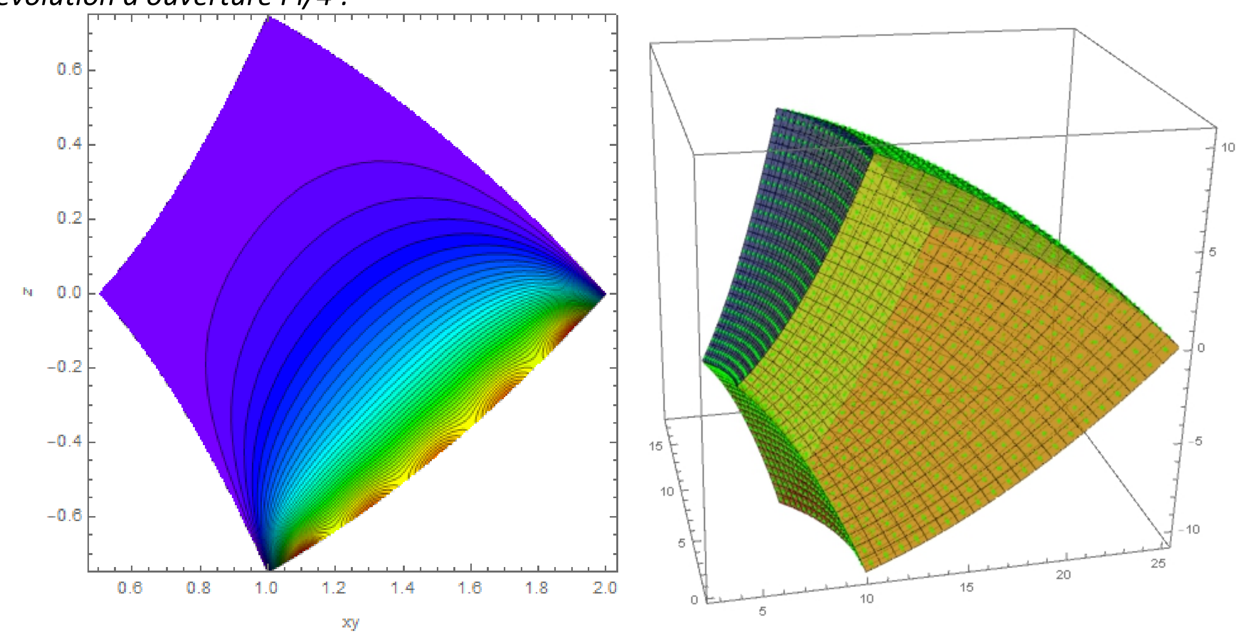
$$A^{\nu_2}_{n_\varphi,n_\mu} = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\mu\, \mu M^{\mu}_{n_\varphi,n_\mu}(\mu) = \frac{\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\mu\, \mu J_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\mu\right)}{J_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\gamma_1\right)} - \frac{\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\mu\, \mu Y_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\mu\right)}{Y_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\gamma_1\right)}$$

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\mu\, \mu J_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{2n_\varphi+1,n_\mu}\mu\right) = \frac{\left[\mu\left\{\lambda^\varphi_{n_\varphi} J_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\mu\right) S_{0,\lambda^\varphi_{n_\varphi}-1}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\mu\right) - J_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}-1}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\mu\right) S_{1,\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\mu\right)\right\}\right]_{\gamma_1}^{\gamma_2}}{\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}}$$

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\mu\, \mu Y_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{2n_\varphi+1,n_\mu}\mu\right) = \frac{\left[\mu\left\{\lambda^\varphi_{n_\varphi} Y_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\mu\right) S_{0,\lambda^\varphi_{n_\varphi}-1}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\mu\right) - Y_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}-1}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\mu\right) S_{1,\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\mu\right)\right\}\right]_{\gamma_1}^{\gamma_2}}{\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi) = \frac{2T_0}{\pi}\sum_{n_\varphi=1}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{A^{\mu_2}_{2n_\varphi+1,n_\mu}\left\{Cos\left(n_\varphi\pi\dfrac{\varphi_1}{\varphi_0}\right) - Cos\left(n_\varphi\pi\dfrac{\varphi_2}{\varphi_0}\right)\right\}}{n_\varphi} \times \dfrac{\dfrac{K_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\nu\right)}{K_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\gamma_1\right)} - \dfrac{I_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\nu\right)}{I_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\gamma_1\right)}}{\dfrac{K_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\gamma_2\right)}{K_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\gamma_1\right)} - \dfrac{I_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\gamma_2\right)}{I_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\gamma_1\right)}} \times \\ \times \dfrac{M^\mu_{n_\varphi,n_\mu}(\mu)}{\left\|M^\mu_{n_\varphi,n_\mu}(\mu)\right\|^2} \times Sin\left(n_\varphi\pi\dfrac{\varphi}{\varphi_0}\right) \end{array}\right\}.$$

Voici un profil en coupe verticale à mi-angle d'ouverture, sur un secteur de paraboloïde de révolution d'ouverture Pi/4 :



Prenons maintenant deux fonctions limites de part et d'autres en palier sur l'angle azimutal et la variable radial µ :

$$T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\mu=\gamma_1}=T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\mu=\gamma_2}=0\quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=0}=T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_0}=0$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\gamma_1}=\begin{cases}1 & \{\mu,\varphi\}\in[\gamma_3,\gamma_4]\times[\varphi_1,\varphi_2]\\ 0 & \{\mu,\varphi\}\notin[\gamma_3,\gamma_4]\times[\varphi_1,\varphi_2]\end{cases}\quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\gamma_2}=\begin{cases}1 & \{\mu,\varphi\}\in[\gamma_3,\gamma_4]\times[\varphi_1,\varphi_2]\\ 0 & \{\mu,\varphi\}\notin[\gamma_3,\gamma_4]\times[\varphi_1,\varphi_2]\end{cases}.$$

La solution s'écrit :

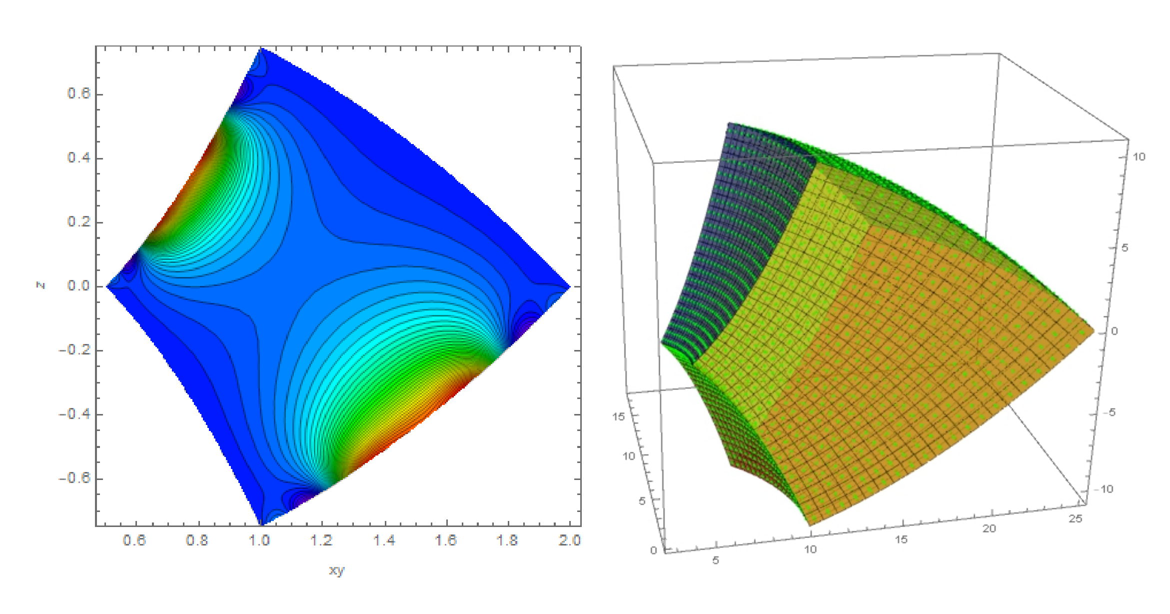
$$A^{\nu_2}_{n_\varphi,n_\mu}=\frac{\int_{\gamma_3}^{\gamma_4}d\mu\,\mu J_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\mu\right)}{J_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\gamma_1\right)}-\frac{\int_{\gamma_3}^{\gamma_4}d\mu\,\mu Y_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\mu\right)}{Y_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\gamma_1\right)}$$

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}d\mu\,\mu J_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{2n_\varphi+1,n_\mu}\mu\right)=\frac{\left[\mu\left\{\lambda^\varphi_{n_\varphi}J_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\mu\right)S_{0,\lambda^\varphi_{n_\varphi}-1}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\mu\right)-J_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}-1}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\mu\right)S_{1,\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\mu\right)\right\}\right]_{\gamma_3}^{\gamma_4}}{\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}}$$

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}d\mu\,\mu Y_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{2n_\varphi+1,n_\mu}\mu\right)=\frac{\left[\mu\left\{\lambda^\varphi_{n_\varphi}Y_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\mu\right)S_{0,\lambda^\varphi_{n_\varphi}-1}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\mu\right)-Y_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}-1}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\mu\right)S_{1,\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\mu\right)\right\}\right]_{\gamma_3}^{\gamma_4}}{\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}}$$

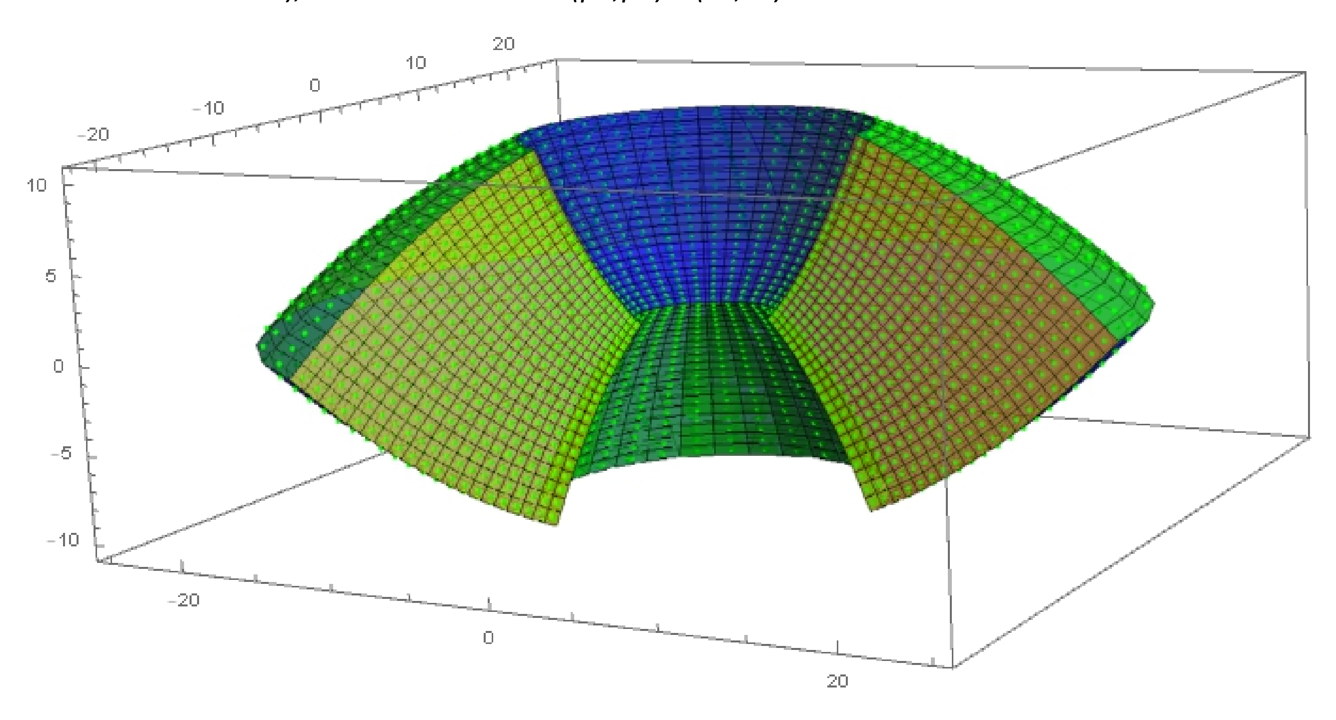
$$T(\mu,\nu,\varphi)=\frac{2T_0}{\pi}\sum_{n_\varphi=1}^{+\infty}\sum_{n_\mu=1}^{+\infty}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A^{\mu_2}_{2n_\varphi+1,n_\mu}\left\{Cos\left(n_\varphi\pi\dfrac{\varphi_1}{\varphi_0}\right)-Cos\left(n_\varphi\pi\dfrac{\varphi_2}{\varphi_0}\right)\right\}}{n_\varphi}\times\dfrac{M^\mu_{n_\varphi,n_\mu}(\mu)}{\left\|M^\mu_{n_\varphi,n_\mu}(\mu)\right\|^2}\times\\ \times\dfrac{\left(\begin{array}{l}K_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\nu\right)\left\{I_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\gamma_1\right)-I_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\gamma_2\right)\right\}-\\ -I_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\nu\right)\left\{K_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\gamma_1\right)-K_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\gamma_2\right)\right\}\end{array}\right)}{K_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\gamma_2\right)I_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\gamma_1\right)-K_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\gamma_1\right)I_{\lambda^\varphi_{n_\varphi}}\left(\lambda^\mu_{n_\varphi,n_\mu}\gamma_2\right)}\times Sin\left(n_\varphi\pi\dfrac{\varphi}{\varphi_0}\right)\end{array}\right\}.$$

Voici un profil en coupe verticale à mi-angle d'ouverture, sur un secteur de paraboloïde de révolution d'ouverture Pi/4 :

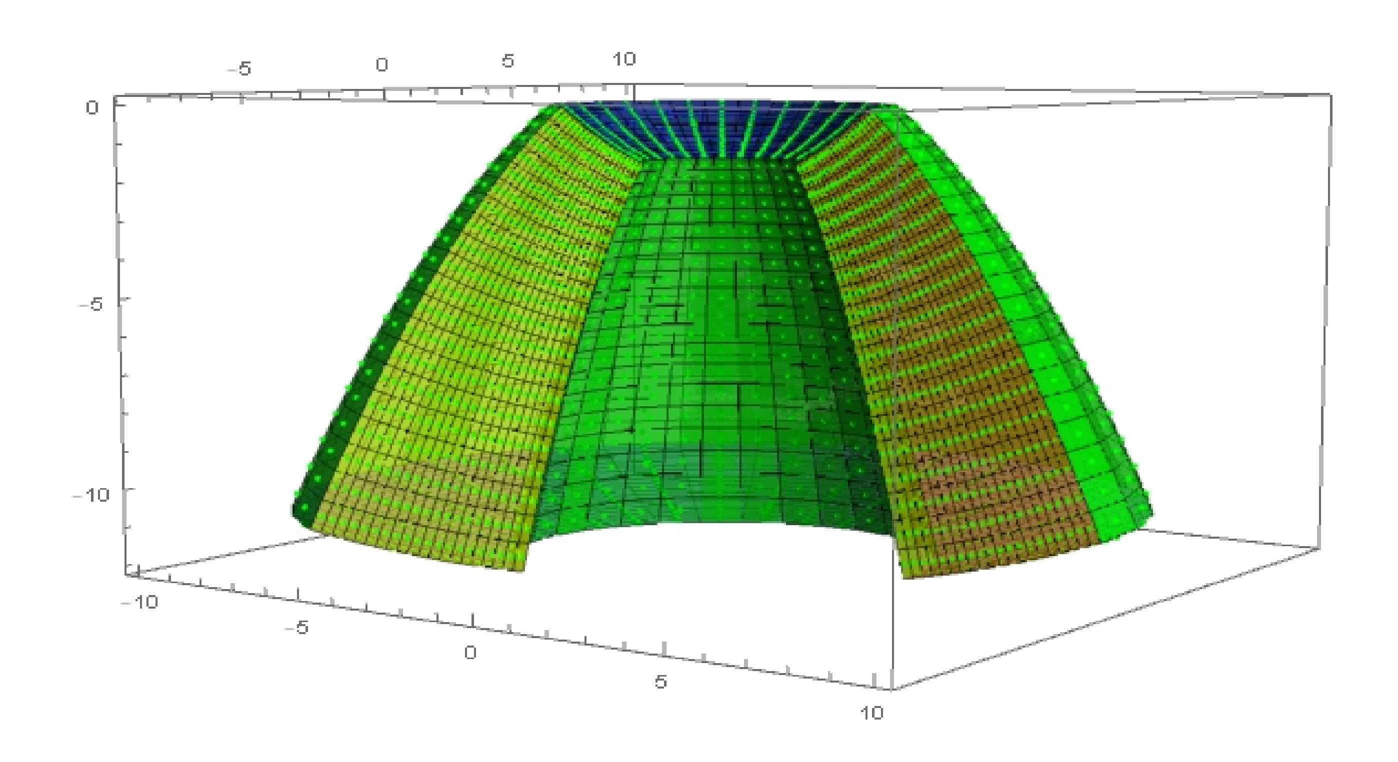


Le problème inhomogène en φ sur le secteur de paraboloïde creux de révolution

Le secteur de paraboloïde creux peut être symétrique par rapport au plan z=0 (plan perpendiculaire à l'axe de révolution), et dans ce cas on a :$(\mu_1,\mu_2) = (\nu_1,\nu_2)$*:*



Le secteur de paraboloïde de révolution creux peut être dissymétrique par rapport au plan z=0 (plan perpendiculaire à l'axe de révolution), et dans ce cas on a :$(\mu_1,\mu_2) \neq (\nu_1,\nu_2)$*:*



Il s'agit du problème suivant :

$$\alpha_{\mu_1}^{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}-\beta_{\mu_1}^{\mu}T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\mu=\mu_1}=0\quad \alpha_{\mu_2}^{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\beta_{\mu_2}^{\mu}T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\mu=\mu_2}=0$$

$$\alpha_{\nu_1}^{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}-\beta_{\nu_1}^{\nu}T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\nu=\nu_1}=0\quad \alpha_{\nu_2}^{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}+\beta_{\nu_2}^{\nu}T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\nu=\nu_2}=0$$

$$\frac{\alpha_0^{\varphi}}{\mu\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi}-\beta_0^{\varphi}T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\varphi=0}=-f_0^{\varphi}(\mu,\nu)\quad \frac{\alpha_{\varphi_0}^{\varphi}}{\mu\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi}+\beta_{\varphi_0}^{\varphi}T(\mu,\nu,\varphi)\Big|_{\varphi=\varphi_0}=f_{\varphi_0}^{\varphi}(\mu,\nu)$$

Ce problème fait intervenir de nouvelles catégories de fonctions de Bessel non modifiées ou modifiées d'ordre imaginaire, à savoir en revenant à la séparation des variables de l'équation de Laplace en coordonnées paraboliques de révolution, et en introduisant de nouvelles notations des variables de séparation :

$$T(\mu,\nu,\varphi)=M(\mu)N(\nu)\Psi(\varphi)\quad \Delta T(\mu,\nu,\varphi)=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\Psi''(\varphi)+\alpha_3\Psi(\varphi)=0\quad \alpha_3=-p^2\Rightarrow\Psi''(\varphi)-p^2\Psi(\varphi)=0\Rightarrow\Psi(\varphi)=A\,Cosh(p\varphi)+B\,Sinh(p\varphi)\\ M''(\mu)+\frac{1}{\mu}M'(\mu)-\left(\alpha_2+\frac{\alpha_3}{\mu^2}\right)M(\mu)=0\Rightarrow\mu^2M''(\mu)+\mu\,M'(\mu)-(\mu^2\alpha_2-p^2)M(\mu)=0\\ N''(\nu)+\frac{1}{\nu}N'(\nu)+\left(\alpha_2-\frac{\alpha_3}{\nu^2}\right)N(\nu)=0\Rightarrow\nu^2N''(\nu)+\nu\,N'(\nu)+(\nu^2\alpha_2+p^2)N(\nu)=0\end{cases}$$

$$Choix\quad (1)\quad Si\ \alpha_2>0\rightarrow\alpha_2=q^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}M(\mu)=A_\mu I_{ip}(q\,\mu)+B_\mu K_{ip}(q\,\mu)\\ N(\nu)=A_\nu J_{ip}(q\nu)+B_\nu Y_{ip}(q\nu)\\ \Psi(\varphi)=A\,Cosh(p\varphi)+B\,Sinh(p\varphi)\end{cases}\quad\begin{cases}M''(\mu)+\frac{1}{\mu}M'(\mu)+\left(\frac{p^2}{\mu^2}-q^2\right)M(\mu)=0\\ N''(\nu)+\frac{1}{\nu}N'(\nu)+\left(\frac{p^2}{\nu^2}+q^2\right)N(\nu)=0\\ \Psi''(\varphi)-p^2\Psi(\varphi)=0\end{cases}$$

$$Choix\quad (2)\quad Si\ \alpha_2<0\rightarrow\alpha_2=-q^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}M(\mu)=A_\mu J_{ip}(q\,\mu)+B_\mu Y_{ip}(q\,\mu)\\ N(\nu)=A_\nu I_{ip}(q\nu)+B_\nu K_{ip}(q\nu)\\ \Psi(\varphi)=A\,Cosh(p\varphi)+B\,Sinh(p\varphi)\end{cases}\quad\begin{cases}M''(\mu)+\frac{1}{\mu}M'(\mu)+\left(\frac{p^2}{\mu^2}+q^2\right)M(\mu)=0\\ N''(\nu)+\frac{1}{\nu}N'(\nu)+\left(\frac{p^2}{\nu^2}-q^2\right)N(\nu)=0\\ \Psi''(\varphi)-p^2\Psi(\varphi)=0\end{cases}$$

On a donc deux choix possibles pour assurer les conditions aux limites homogènes et inhomogènes aux frontières du domaine. Dans cette configuration géométrique, contrairement au cas d'un paraboloïde de révolution plein, les fonctions ne présentent aucune singularité, ni phénomène d'oscillation rapide. Par ailleurs la nature oscillatoire modérée est un bon indice de la capacité de ces fonctions à former une base de fonctions propres du problème aux limites.

Dans la notation adoptée , les deux paramètres de séparation sont liés à une série double d'indice, dont nous verrons plus tard une méthode de construction de l'indexation. On notera λ la « valeur propre d'ordre» et γ la « valeur propre d'argument ». On verra que cette distinction est liée à un système couplé d'équations transcendantales, mettant en jeu les fonctions de Bessel d'ordre imaginaire.

Prenons comme exemple le premier choix, avec les substitutions suivantes :

$$q \to \gamma \quad p \to \lambda \quad \begin{cases} M(\mu) = A_\mu I_{i\lambda}(\gamma\mu) + B_\mu K_{i\lambda}(\gamma\mu) \\ N(\nu) = A_\nu J_{i\lambda}(\gamma\nu) + B_\nu Y_{i\lambda}(\gamma\nu) \\ \Psi(\varphi) = A\,Cosh(\lambda\varphi) + B\,Sinh(\lambda\varphi) \end{cases}$$

Pour l'instant rappelons le choix de représentation des fonctions de Bessel modifiée d'ordre imaginaire (voir problème aux limites sur des secteurs cylindriques 3D), ainsi que celui des fonctions de Bessel d'ordre imaginaires : $\begin{matrix} \widetilde{K}_\lambda(z) = K_{i\lambda}(z) \quad et \quad \widetilde{I}_\lambda(z) = Re(I_{i\lambda}(z)) \\ \widetilde{J}_\lambda(z) = Re(J_{i\lambda}(z)) \quad et \quad \widetilde{Y}_\lambda(z) = \mathrm{Im}(J_{i\lambda}(z)) \end{matrix}$.

L'indépendance de ces couples de fonctions de Bessel est établi (voir l'article de 1990 de T.M.Dunster « Bessel Functions of Purely Imaginary Order »). Les fonctions propres en μ et en ν doivent respecter les conditions aux limites homogènes sur les deux dimensions de la section creuse :

$$\alpha^\mu_{\mu_1} M'(\mu) - \beta^\mu_{\mu_1} M(\mu)\Big|_{\mu=\mu_1} = 0$$

$$\Rightarrow M(\mu) = \frac{\widetilde{I}_\lambda(\gamma\mu)}{\alpha^\mu_{\mu_1}\gamma\,\widetilde{I}_\lambda'(\gamma\mu_1) - \beta^\mu_{\mu_1}\widetilde{I}_\lambda(\gamma\mu_1)} - \frac{\widetilde{K}_\lambda(\gamma\mu)}{\alpha^\mu_{\mu_1}\gamma\,\widetilde{K}_\lambda'(\gamma\mu_1) - \beta^\mu_{\mu_1}\widetilde{K}_\lambda(\gamma\mu_1)}$$

$$\alpha^\mu_{\mu_2} M'(\mu) + \beta^\mu_{\mu_2} M(\mu)\Big|_{\mu=\mu_2} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha^\mu_{\mu_2}\gamma\,\widetilde{I}_\lambda'(\gamma\mu_2) + \beta^\mu_{\mu_2}\widetilde{I}_\lambda(\gamma\mu_2)}{\alpha^\mu_{\mu_1}\gamma\,\widetilde{I}_\lambda'(\gamma\mu_1) - \beta^\mu_{\mu_1}\widetilde{I}_\lambda(\gamma\mu_1)} = \frac{\alpha^\mu_{\mu_2}\gamma\,\widetilde{K}_\lambda'(\gamma\mu_2) + \beta^\mu_{\mu_2}\widetilde{K}_\lambda(\gamma\mu_2)}{\alpha^\mu_{\mu_1}\gamma\,\widetilde{K}_\lambda'(\gamma\mu_1) - \beta^\mu_{\mu_1}\widetilde{K}_\lambda(\gamma\mu_1)}$$

$$\alpha^\nu_{\nu_1} N'(\nu) - \beta^\nu_{\nu_1} N(\nu)\Big|_{\nu=\nu_1} = 0 \Rightarrow N_{n,m}(\nu) = \frac{\widetilde{J}_\lambda(\gamma\nu)}{\alpha^\nu_{\nu_1}\gamma\,\widetilde{J}_\lambda'(\gamma\nu_1) - \beta^\nu_{\nu_1}\widetilde{J}_\lambda(\gamma\nu_1)} - \frac{\widetilde{Y}_\lambda(\gamma\nu)}{\alpha^\nu_{\nu_1}\gamma\,\widetilde{Y}_\lambda'(\gamma\nu_1) - \beta^\nu_{\nu_1}\widetilde{Y}_\lambda(\gamma\nu_1)}$$

$$\alpha^\nu_{\nu_2} N'(\nu) + \beta^\nu_{\nu_2} N(\nu)\Big|_{\nu=\nu_2} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha^\nu_{\nu_2}\gamma\,\widetilde{J}_\lambda'(\gamma\nu_2) + \beta^\nu_{\nu_2}\widetilde{J}_\lambda(\gamma\nu_2)}{\alpha^\nu_{\nu_1}\gamma\,\widetilde{J}_\lambda'(\gamma\nu_1) - \beta^\nu_{\nu_1}\widetilde{J}_\lambda(\gamma\nu_1)} = \frac{\alpha^\nu_{\nu_2}\gamma\,\widetilde{Y}_\lambda'(\gamma\nu_2) + \beta^\nu_{\nu_2}\widetilde{Y}_\lambda(\gamma\nu_2)}{\alpha^\nu_{\nu_1}\gamma\,\widetilde{Y}_\lambda'(\gamma\nu_1) - \beta^\nu_{\nu_1}\widetilde{Y}_\lambda(\gamma\nu_1)}$$

On obtient donc un système couplé d'équation transcendantales, pour déterminer les valeurs propres de séparation :

$$\lambda \quad et \quad \gamma \quad telles\ que \quad \begin{cases} \dfrac{\alpha^\mu_{\mu_2}\gamma\,\widetilde{I}_\lambda'(\gamma\mu_2) + \beta^\mu_{\mu_2}\widetilde{I}_\lambda(\gamma\mu_2)}{\alpha^\mu_{\mu_1}\gamma\,\widetilde{I}_\lambda'(\gamma\mu_1) - \beta^\mu_{\mu_1}\widetilde{I}_\lambda(\gamma\mu_1)} = \dfrac{\alpha^\mu_{\mu_2}\gamma\,\widetilde{K}_\lambda'(\gamma\mu_2) + \beta^\mu_{\mu_2}\widetilde{K}_\lambda(\gamma\mu_2)}{\alpha^\mu_{\mu_1}\gamma\,\widetilde{K}_\lambda'(\gamma\mu_1) - \beta^\mu_{\mu_1}\widetilde{K}_\lambda(\gamma\mu_1)} \\ et \\ \dfrac{\alpha^\nu_{\nu_2}\gamma\,\widetilde{J}_\lambda'(\gamma\nu_2) + \beta^\nu_{\nu_2}\widetilde{J}_\lambda(\gamma\nu_2)}{\alpha^\nu_{\nu_1}\gamma\,\widetilde{J}_\lambda'(\gamma\nu_1) - \beta^\nu_{\nu_1}\widetilde{J}_\lambda(\gamma\nu_1)} = \dfrac{\alpha^\nu_{\nu_2}\gamma\,\widetilde{Y}_\lambda'(\gamma\nu_2) + \beta^\nu_{\nu_2}\widetilde{Y}_\lambda(\gamma\nu_2)}{\alpha^\nu_{\nu_1}\gamma\,\widetilde{Y}_\lambda'(\gamma\nu_1) - \beta^\nu_{\nu_1}\widetilde{Y}_\lambda(\gamma\nu_1)} \end{cases}$$

Avec le deuxième choix, on aboutit au système d'équation transcendantales suivant dans lequel on intervertit tout simplement les fonctions I->J et K->Y :

$$\lambda \quad et \quad \gamma \quad telles\ que \quad \begin{cases} \dfrac{\alpha_{\mu_2}^{\mu}\gamma\,\widetilde{J}_{\lambda}'(\gamma\mu_2)+\beta_{\mu_2}^{\mu}\widetilde{J}_{\lambda}(\gamma\mu_2)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\gamma\,\widetilde{J}_{\lambda}'(\gamma\mu_1)-\beta_{\mu_1}^{\mu}\widetilde{J}_{\lambda}(\gamma\mu_1)}=\dfrac{\alpha_{\mu_2}^{\mu}\gamma\,\widetilde{Y}_{\lambda}'(\gamma\mu_2)+\beta_{\mu_2}^{\mu}\widetilde{Y}_{\lambda}(\gamma\mu_2)}{\alpha_{\mu_1}^{\mu}\gamma\,\widetilde{Y}_{\lambda}'(\gamma\mu_1)-\beta_{\mu_1}^{\mu}\widetilde{Y}_{\lambda}(\gamma\mu_1)} \\ et \\ \dfrac{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\gamma\,\widetilde{I}_{\lambda}'(\gamma\nu_2)+\beta_{\nu_2}^{\nu}\widetilde{I}_{\lambda}(\gamma\nu_2)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\gamma\,\widetilde{I}_{\lambda}'(\gamma\nu_1)-\beta_{\nu_1}^{\nu}\widetilde{I}_{\lambda}(\gamma\nu_1)}=\dfrac{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\gamma\,\widetilde{K}_{\lambda}'(\gamma\nu_2)+\beta_{\nu_2}^{\nu}\widetilde{K}_{\lambda}(\gamma\nu_2)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\gamma\,\widetilde{K}_{\lambda}'(\gamma\nu_1)-\beta_{\nu_1}^{\nu}\widetilde{K}_{\lambda}(\gamma\nu_1)} \end{cases}$$

Dès lors que la géométrie du solide est symétrique et que les conditions aux limites sont elles-même par nature symétrique alors ***les deux systèmes n'en font plus qu'un seul*** *:*

$$\mu_1=\nu_1=\eta_1 \quad \mu_2=\nu_2=\eta_2 \quad \alpha_{\nu_1}^{\nu}=\alpha_{\mu_1}^{\mu}=\alpha_1 \quad \beta_{\mu_1}^{\mu}=\beta_{\nu_1}^{\nu}=\beta_1 \quad \alpha_{\nu_2}^{\nu}=\alpha_{\mu_2}^{\mu}=\alpha_2 \quad \beta_{\mu_2}^{\mu}=\beta_{\nu_2}^{\nu}=\beta_2$$

$$\lambda \quad et \quad \gamma \quad telles\ que \quad \begin{cases} \dfrac{\alpha_2\gamma\,\widetilde{I}_{\lambda}'(\gamma\eta_2)+\beta_2\widetilde{I}_{\lambda}(\gamma\eta_2)}{\alpha_1\gamma\,\widetilde{I}_{\lambda}'(\gamma\eta_1)-\beta_1\widetilde{I}_{\lambda}(\gamma\eta_1)}=\dfrac{\alpha_2\gamma\,\widetilde{K}_{\lambda}'(\gamma\eta_2)+\beta_2\widetilde{K}_{\lambda}(\gamma\eta_2)}{\alpha_1\gamma\,\widetilde{K}_{\lambda}'(\gamma\eta_1)-\beta_1\widetilde{K}_{\lambda}(\gamma\eta_1)} \\ et \\ \dfrac{\alpha_2\gamma\,\widetilde{J}_{\lambda}'(\gamma\eta_2)+\beta_2\widetilde{J}_{\lambda}(\gamma\eta_2)}{\alpha_1\gamma\,\widetilde{J}_{\lambda}'(\gamma\eta_1)-\beta_{\nu_1}^{\nu}\widetilde{J}_{\lambda}(\gamma\eta_1)}=\dfrac{\alpha_2\gamma\,\widetilde{Y}_{\lambda}'(\gamma\eta_2)+\beta_2\widetilde{Y}_{\lambda}(\gamma\eta_2)}{\alpha_1\gamma\,\widetilde{Y}_{\lambda}'(\gamma\eta_1)-\beta_1\widetilde{Y}_{\lambda}(\gamma\eta_1)} \end{cases}$$

De prime abord il n'est pas évident de savoir si l'un quelconque de ces systèmes d'équations transcendantales possède bien une solution, en dépit du caractère oscillatoire de toutes les fonctions mises en jeu. Mais c'est un fait que les solutions existent et plus loin on peut en donner une méthode de construction approchée assez fiable à partir des comportements asymptotiques des fonctions de Bessel d'ordre imaginaire.

Il est également important d'insister sur le fait que pour le problème aux limites les deux choix de solutions sont non seulement possibles mais aussi nécessaires pour la construction de la solution. Dans un problème dissymétrique il y a peu de chance que des couples de valeurs propres (λ,γ) soient identiques, aussi les fonctions propres sont-elles nécessairement orthogonales à deux dimensions.

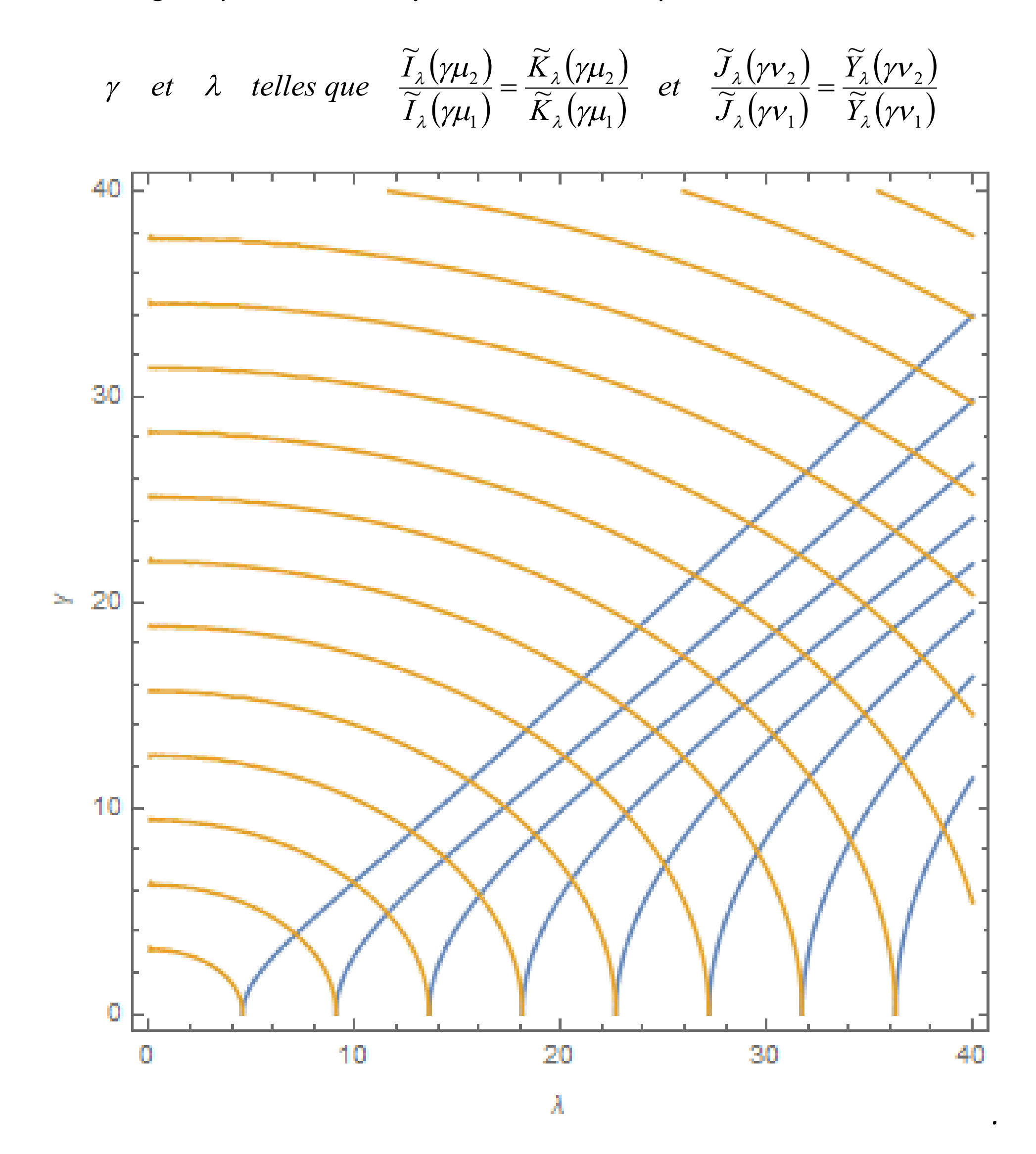
Dans un problème entièrement symétrique, dans ce cas à un même couple (λ,γ) de valeurs propres solutions du système d'équations transcendantales il y a deux fonctions propres correspondantes, à savoir par exemple pour un problème aux limites de Dirichlet :

$$\begin{cases} M(\mu)=\dfrac{\widetilde{I}_{\lambda}(\gamma\mu)}{\widetilde{I}_{\lambda}(\gamma\eta_1)}-\dfrac{\widetilde{K}_{\lambda}(\gamma\mu)}{\widetilde{K}_{\lambda}(\gamma\eta_1)} \quad N(\nu)=\dfrac{\widetilde{J}_{\lambda}(\gamma\nu)}{\widetilde{J}_{\lambda}(\gamma\eta_1)}-\dfrac{\widetilde{Y}_{\lambda}(\gamma\nu)}{\widetilde{Y}_{\lambda}(\gamma\eta_1)} \\ M(\mu)=\dfrac{\widetilde{J}_{\lambda}(\gamma\mu)}{\widetilde{J}_{\lambda}(\gamma\eta_1)}-\dfrac{\widetilde{Y}_{\lambda}(\gamma\mu)}{\widetilde{Y}_{\lambda}(\gamma\eta_1)} \quad N(\nu)=\dfrac{\widetilde{I}_{\lambda}(\gamma\nu)}{\widetilde{I}_{\lambda}(\gamma\eta_1)}-\dfrac{\widetilde{K}_{\lambda}(\gamma\nu)}{\widetilde{K}_{\lambda}(\gamma\eta_1)} \end{cases}$$

La question est donc de savoir si l'orthogonalité bi-dimensionnelle est assurée entre ces deux choix de fonctions !

Nous avons étudié les iso-courbes de valeur nulle pour les deux équations transcendantales obtenues dans diverses configurations, avec des conditions aux limites homogènes de Dirichlet sur toutes les frontières du domaine, ainsi que des conditions homogènes de Neumman, ainsi que des cas mixtes, et il s'avère bien que des couples de valeurs propres existent dès lors que <u>les iso-courbes de valeurs nulles des deux équations transcendantales se croisent</u>. A titre d'exemple et avant de donner des valeurs numériques précises obtenues, illustrons ceci par des graphes de contour dans le cas Dirichlet homogène partout sur le système suivant d'équations transcendantales :

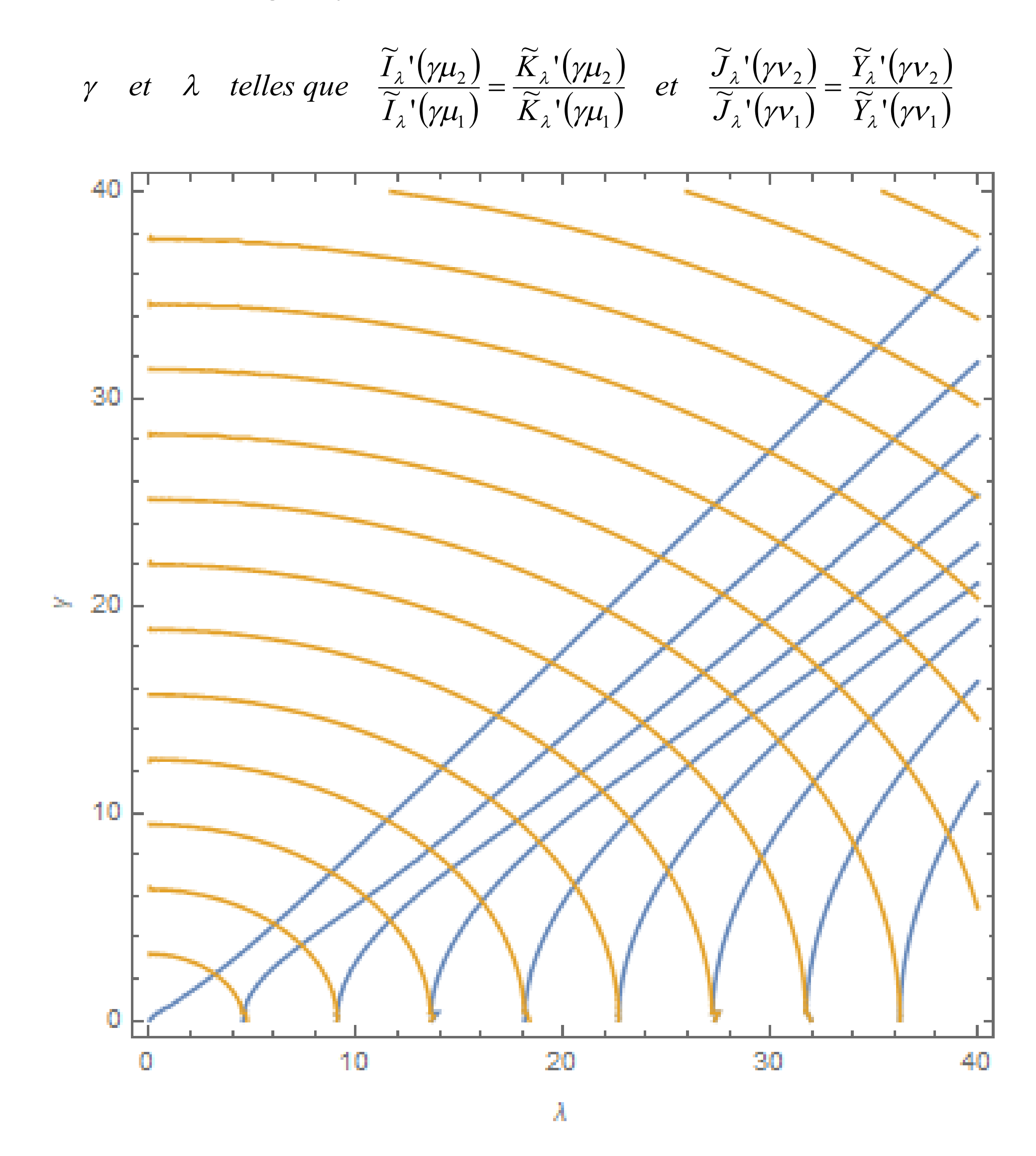
$$\gamma \quad et \quad \lambda \quad telles\ que \quad \frac{\widetilde{I}_\lambda(\gamma\mu_2)}{\widetilde{I}_\lambda(\gamma\mu_1)} = \frac{\widetilde{K}_\lambda(\gamma\mu_2)}{\widetilde{K}_\lambda(\gamma\mu_1)} \quad et \quad \frac{\widetilde{J}_\lambda(\gamma\nu_2)}{\widetilde{J}_\lambda(\gamma\nu_1)} = \frac{\widetilde{Y}_\lambda(\gamma\nu_2)}{\widetilde{Y}_\lambda(\gamma\nu_1)}$$



.

et dans le cas Neumann homogène partout :

$$\gamma \quad et \quad \lambda \quad telles\ que \quad \frac{\widetilde{I}_\lambda'(\gamma\mu_2)}{\widetilde{I}_\lambda'(\gamma\mu_1)} = \frac{\widetilde{K}_\lambda'(\gamma\mu_2)}{\widetilde{K}_\lambda'(\gamma\mu_1)} \quad et \quad \frac{\widetilde{J}_\lambda'(\gamma\nu_2)}{\widetilde{J}_\lambda'(\gamma\nu_1)} = \frac{\widetilde{Y}_\lambda'(\gamma\nu_2)}{\widetilde{Y}_\lambda'(\gamma\nu_1)}$$



Relation d'orthogonalité à 2 dimensions

Quelque soit le choix de valeurs propres, il s'avère que les fonctions propres n'ont pas la propriété usuelle d'orthogonalité pour des couples de valeurs propres distinctes.

$$M''(\mu)+\frac{1}{\mu}M'(\mu)+\left(\frac{\lambda^2}{\mu^2}-\gamma^2\right)M(\mu)=0 \quad N''(\nu)+\frac{1}{\nu}N'(\nu)+\left(\frac{\lambda^2}{\nu^2}+\gamma^2\right)N(\nu)=0 \quad \Psi''(\varphi)-\lambda^2\Psi(\varphi)=0$$

Pour une même valeur de λ, il n'existe pas de multiples valeurs de γ pour lesquelles les équations transcendantales soient vérifiées simultanément. Dans ces conditions il est vain de rechercher une relation d'orthogonalité unidimensionnelle pour chacune des fonctions propres dans leur variables respectives.

On recherche donc une relation d'orthogonalité bidimensionnelle qu'il est facile d'obtenir à partir de l'équation de Laplace non encore séparée en μ et ν :

$$\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}\right)\right)+\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{\nu^2}\right)\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=M(\mu)N(\nu)\Psi(\varphi)\quad et\quad \Psi''(\varphi)=\lambda^2\Psi(\varphi)$$

$$\Rightarrow\frac{N(\nu)}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu\frac{\partial M(\mu)}{\partial\mu}\right)+\frac{M(\mu)}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu\frac{\partial N(\nu)}{\partial\nu}\right)+\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{\nu^2}\right)\lambda^2M(\mu)N(\nu)=0$$

$$Soit\quad \lambda_1,\lambda_2\quad deux\,valeurs\,propres\,distinctes\Rightarrow\{M_1(\mu),N_1(\nu)\}\quad\{M_2(\mu),N_2(\nu)\}$$

$$M_2(\mu)N_2(\nu)\left\{\frac{N_1(\nu)}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu\frac{\partial M_1(\mu)}{\partial\mu}\right)+\frac{M_1(\mu)}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu\frac{\partial N_1(\nu)}{\partial\nu}\right)+\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{\nu^2}\right)\lambda_1^2M_1(\mu)N_1(\nu)\right\}=0$$

$$M_1(\mu)N_1(\nu)\left\{\frac{N_2(\nu)}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu\frac{\partial M_2(\mu)}{\partial\mu}\right)+\frac{M_2(\mu)}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu\frac{\partial N_2(\nu)}{\partial\nu}\right)+\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{\nu^2}\right)\lambda_2^2M_2(\mu)N_2(\nu)\right\}=0$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{N_1(\nu)N_2(\nu)}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu M_2(\mu)\frac{\partial M_1(\mu)}{\partial\mu}\right)+\frac{M_1(\mu)M_2(\mu)}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu N_2(\nu)\frac{\partial N_1(\nu)}{\partial\nu}\right)+\\+\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{\nu^2}\right)\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)M_1(\mu)N_1(\nu)M_2(\mu)N_2(\nu)\end{array}\right\}=0$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\nu\,N_1(\nu)N_2(\nu)\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu M_2(\mu)\frac{\partial M_1(\mu)}{\partial\mu}\right)+\mu\,M_1(\mu)M_2(\mu)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu N_2(\nu)\frac{\partial N_1(\nu)}{\partial\nu}\right)+\\+\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)M_1(\mu)N_1(\nu)M_2(\mu)N_2(\nu)\end{array}\right\}=0$$

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\nu\,N_1(\nu)N_2(\nu)\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu M_2(\mu)\frac{\partial M_1(\mu)}{\partial\mu}\right)=\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu M_2(\mu)\frac{\partial M_1(\mu)}{\partial\mu}\right)\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\nu\,N_1(\nu)N_2(\nu)=$$

$$=\left[\mu M_2(\mu)\frac{\partial M_1(\mu)}{\partial\mu}\right]_{\mu_1}^{\mu_2}\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\nu\,N_1(\nu)N_2(\nu)=0\quad De\ même\quad\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\mu\,M_1(\mu)M_2(\mu)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu N_2(\nu)\frac{\partial N_1(\nu)}{\partial\nu}\right)=0$$

$$Comme\quad\lambda_1\neq\lambda_2\Rightarrow\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}M_1(\mu)N_1(\nu)M_2(\mu)N_2(\nu)=0$$

C'est la relation d'orthogonalité recherchée qui est parfaitement symétrique en μ et ν. Dès lors que l'on obtient un couple de valeurs propres, il convient de construire les solutions en tenant compte de cette relation d'orthogonalité, et en calculant la norme bidimensionnelle associée :

$$M_{\lambda,\gamma}(\mu)=\frac{\widetilde{I}_\lambda(\gamma\mu)}{\alpha^{\mu}_{\mu_1}\gamma\widetilde{I}_\lambda'(\gamma\mu_1)-\beta^{\mu}_{\mu_1}\widetilde{I}_\lambda(\gamma\mu_1)}-\frac{\widetilde{K}_\lambda(\gamma\mu)}{\alpha^{\mu}_{\mu_1}\gamma\widetilde{K}_\lambda'(\gamma\mu_1)-\beta^{\mu}_{\mu_1}\widetilde{K}_\lambda(\gamma\mu_1)}$$

$$N_{\lambda,\gamma}(\nu)=\frac{\widetilde{J}_\lambda(\gamma\nu)}{\alpha^{\nu}_{\nu_1}\gamma\widetilde{J}_\lambda'(\gamma\nu_1)-\beta^{\nu}_{\nu_1}\widetilde{J}_\lambda(\gamma\nu_1)}-\frac{\widetilde{Y}_\lambda(\gamma\nu)}{\alpha^{\nu}_{\nu_1}\gamma\widetilde{Y}_\lambda'(\gamma\nu_1)-\beta^{\nu}_{\nu_1}\widetilde{Y}_\lambda(\gamma\nu_1)}$$

$$U_{\lambda,\gamma}(\mu,\nu)=M_{\lambda,\gamma}(\mu)N_{\lambda,\gamma}(\nu)\Rightarrow\left\|U_{\lambda,\gamma}(\mu,\nu)\right\|^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}\left(M_{\lambda,\gamma}(\mu)\right)^2\left(N_{\lambda,\gamma}(\nu)\right)^2$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{(\lambda,\gamma)}M_{\lambda,\gamma}(\mu)N_{\lambda,\gamma}(\nu)\left(A_{\lambda,\gamma}\,Cosh(\lambda\varphi)+B_{\lambda,\gamma}\,Sinh(\lambda\varphi)\right)$$

.

<u>Relation d'orthogonalité entre fonctions propres de choix différents dans un problème entièrement symétrique</u>

Si le problème aux limites n'est pas symétrique alors les couples de valeurs propres n'ont aucune raison d'être identique entre les deux types de fonctions propres. Mais il n'en est pas de même quand le problème est entièrement symétrique. Dans ce cas un même couple de valeurs propres (λ,γ) correspondent à deux types de fonctions propres (exemple problème de Dirichlet) :

$$\begin{cases}M_1(\mu)=\dfrac{\widetilde{I}_\lambda(\gamma\mu)}{\widetilde{I}_\lambda(\gamma\eta_1)}-\dfrac{\widetilde{K}_\lambda(\gamma\mu)}{\widetilde{K}_\lambda(\gamma\eta_1)} & N_1(\nu)=\dfrac{\widetilde{J}_\lambda(\gamma\nu)}{\widetilde{J}_\lambda(\gamma\eta_1)}-\dfrac{\widetilde{Y}_\lambda(\gamma\nu)}{\widetilde{Y}_\lambda(\gamma\eta_1)}\\ M_2(\mu)=\dfrac{\widetilde{J}_\lambda(\gamma\mu)}{\widetilde{J}_\lambda(\gamma\eta_1)}-\dfrac{\widetilde{Y}_\lambda(\gamma\mu)}{\widetilde{Y}_\lambda(\gamma\eta_1)} & N_2(\nu)=\dfrac{\widetilde{I}_\lambda(\gamma\nu)}{\widetilde{I}_\lambda(\gamma\eta_1)}-\dfrac{\widetilde{K}_\lambda(\gamma\nu)}{\widetilde{K}_\lambda(\gamma\eta_1)}\end{cases}$$

La question se pose donc de l'orthogonalité de ces deux fonctions. L'orthogonalité précédente à 2 dimensions ne peut s'appliquer car les valeurs propres sont identiques. Cherchons alors à établir une orthogonalité unidimensionnelle. On sait que ces fonctions sont solutions des équations différentielles suivantes :

$$M_1''(\mu)+\frac{1}{\mu}M_1'(\mu)+\left(\frac{\lambda^2}{\mu^2}-\gamma^2\right)M_1(\mu)=0\quad N_1''(\nu)+\frac{1}{\nu}N_1'(\nu)+\left(\frac{\lambda^2}{\nu^2}+\gamma^2\right)N_1(\nu)=0$$

$$M_2''(\mu)+\frac{1}{\mu}M_2'(\mu)+\left(\frac{\lambda^2}{\mu^2}+\gamma^2\right)M_2(\mu)=0\quad N_2''(\nu)+\frac{1}{\nu}N_2'(\nu)+\left(\frac{\lambda^2}{\nu^2}-\gamma^2\right)N_2(\nu)=0$$

Cela conduit immédiatement aux relations suivantes :

$$\begin{cases}\dfrac{M_2(\mu)}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu\dfrac{\partial M_1(\mu)}{\partial\mu}\right)-\dfrac{M_1(\mu)}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu\dfrac{\partial M_2(\mu)}{\partial\mu}\right)-2\gamma^2M_1(\mu)M_2(\mu)=0\\ \dfrac{N_2(\nu)}{\nu}\dfrac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu\dfrac{\partial N_1(\nu)}{\partial\nu}\right)-\dfrac{N_1(\nu)}{\nu}\dfrac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu\dfrac{\partial N_2(\nu)}{\partial\nu}\right)+2\gamma^2N_1(\nu)N_2(\nu)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu\left\{M_2(\mu)\dfrac{\partial M_1(\mu)}{\partial\mu}-M_1(\mu)\dfrac{\partial M_2(\mu)}{\partial\mu}\right\}\right)-2\gamma^2\mu M_1(\mu)M_2(\mu)=0\\ \dfrac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu\left\{N_2(\nu)\dfrac{\partial N_1(\nu)}{\partial\nu}-N_1(\nu)\dfrac{\partial N_2(\nu)}{\partial\nu}\right\}\right)+2\gamma^2\nu N_1(\nu)N_2(\nu)=0\end{cases}$$

En intégrant et en appliquant les conditions aux limites, on obtient bien les relations d'orthogonalité unidimensionnelles classiques entre les deux choix de solutions :

$$\begin{cases} 2\gamma^2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\mu\, \mu M_1(\mu) M_2(\mu) = 0 \\ 2\gamma^2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\nu\, \nu N_1(\nu) N_2(\nu) = 0 \end{cases}$$

De cette orthogonalité découle immédiatement l'orthogonalité bi-dimensionnelle :

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\, \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu} M_1(\mu)N_1(\nu)M_2(\mu)N_2(\nu) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\, \frac{\mu^2}{\mu\nu} M_1(\mu)N_1(\nu)M_2(\mu)N_2(\nu) +$$

$$+ \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\, \frac{\nu^2}{\mu\nu} M_1(\mu)N_1(\nu)M_2(\mu)N_2(\nu) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu\, \mu M_1(\mu)M_2(\mu) \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\, \frac{N_1(\nu)N_2(\nu)}{\nu} +$$

$$+ \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu\, \frac{M_1(\mu)M_2(\mu)}{\mu} \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\, \nu N_1(\nu)N_2(\nu)$$

$$\text{Comme} \quad \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu\, \mu M_1(\mu)M_2(\mu) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\, \nu N_1(\nu)N_2(\nu) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\, \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu} M_1(\mu)N_1(\nu)M_2(\mu)N_2(\nu) = 0$$

Cette dernière propriété permet de calculer les normes systématiquement sur le mode bidimensionnel.

Et de plus cela permet de compléter la forme du développement en série selon les deux jeux de fonctions propres :

$$T(\mu,\nu,\varphi) = \sum_{(\lambda,\gamma)} \left\{ M_{1,\lambda,\gamma}(\mu)N_{1,\lambda,\gamma}(\nu)\left(A_{1,\lambda,\gamma}\, Cosh(\lambda\varphi) + B_{1,\lambda,\gamma}\, Sinh(\lambda\varphi)\right) + M_{2,\lambda,\gamma}(\mu)N_{2,\lambda,\gamma}(\nu)\left(A_{1,\lambda,\gamma}\, Cosh(\lambda\varphi) + B_{1,\lambda,\gamma}\, Sinh(\lambda\varphi)\right) \right\}$$

__Relation d'orthogonalité entre fonctions propres de choix différents dans un problème asymétrique__

La relation d'orthogonalité se démontre également de la même manière pour un problème général asymétrique avec des conditions aux limites asymétriques. Imaginons pour simplifier un problème dont les conditions aux limites homogènes sont uniquement de Dirichlet, et voici les deux jeux de fonctions propres :

$$M_{1,\lambda,\gamma}(\mu) = \frac{\tilde{I}_\lambda(\gamma\mu)}{\tilde{I}_\lambda(\gamma\mu_1)} - \frac{\tilde{K}_\lambda(\gamma\mu)}{\tilde{K}_\lambda(\gamma\mu_1)} \qquad N_{1,\lambda,\gamma}(\nu) = \frac{\tilde{J}_\lambda(\gamma\nu)}{\tilde{J}_\lambda(\gamma\nu_1)} - \frac{\tilde{Y}_\lambda(\gamma\nu)}{\tilde{Y}_\lambda(\gamma\nu_1)}$$

$$\lambda \quad et \quad \gamma \quad telles\ que \quad \frac{\tilde{I}_\lambda(\gamma\mu_2)}{\tilde{I}_\lambda(\gamma\mu_1)} = \frac{\tilde{K}_\lambda(\gamma\mu_2)}{\tilde{K}_\lambda(\gamma\mu_1)} \quad et \quad \frac{\tilde{J}_\lambda(\gamma\nu_2)}{\tilde{J}_\lambda(\gamma\nu_1)} = \frac{\tilde{Y}_\lambda(\gamma\nu_2)}{\tilde{Y}_\lambda(\gamma\nu_1)}.$$

$$M_{2,\lambda,\gamma}(\mu) = \frac{\tilde{J}_\lambda(\gamma\mu)}{\tilde{J}_\lambda(\gamma\mu_1)} - \frac{\tilde{Y}_\lambda(\gamma\mu)}{\tilde{Y}_\lambda(\gamma\mu_1)} \qquad N_{2,\lambda,\gamma}(\nu) = \frac{\tilde{I}_\lambda(\gamma\nu)}{\tilde{I}_\lambda(\gamma\nu_1)} - \frac{\tilde{K}_\lambda(\gamma\nu)}{\tilde{K}_\lambda(\gamma\nu_1)}$$

$$\lambda \quad et \quad \gamma \quad telles\ que \quad \frac{\tilde{J}_\lambda(\gamma\mu_2)}{\tilde{J}_\lambda(\gamma\mu_1)} = \frac{\tilde{Y}_\lambda(\gamma\mu_2)}{\tilde{Y}_\lambda(\gamma\mu_1)} \quad et \quad \frac{\tilde{I}_\lambda(\gamma\nu_2)}{\tilde{I}_\lambda(\gamma\nu_1)} = \frac{\tilde{K}_\lambda(\gamma\nu_2)}{\tilde{K}_\lambda(\gamma\nu_1)}.$$

Cela permet donc de construire la solution à l'aide de deux séries sur les deux jeux de valeurs propres et fonctions propres trouvées :

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{(\lambda,\gamma)\in Jeux_1} M_{1,\lambda,\gamma}(\mu)N_{1,\lambda,\gamma}(\nu)\left(A_{1,\lambda,\gamma}\,Cosh(\lambda\varphi)+B_{1,\lambda,\gamma}\,Sinh(\lambda\varphi)\right)+\sum_{(\lambda,\gamma)\in Jeux_2} M_{2,\lambda,\gamma}(\mu)N_{2,\lambda,\gamma}(\nu)\left(A_{1,\lambda,\gamma}\,Cosh(\lambda\varphi)+B_{1,\lambda,\gamma}\,Sinh(\lambda\varphi)\right)$$

avec pour même produit scalaire entre fonctions et normes :

$$\langle M_1(\mu)N_1(\nu),M_2(\mu)N_2(\nu)\rangle=\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}M_1(\mu)N_1(\nu)M_2(\mu)N_2(\nu)$$

$$\Rightarrow\|M_1(\mu)N_1(\nu)\|=\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}(M_1(\mu)N_1(\nu))^2$$

<u>Relation d'orthogonalité entre fonctions propres de type Bessel et fonctions propres de type sinus logarithmique</u>

La relation d'orthogonalité bidimensionnelle est également acquise entre ces deux types de fonctions solutions d'un même problème aux limites par le même calcul que précédemment. Il vient par exemple pour un problème de Dirichlet :

$$\begin{cases}M_1(\mu)=\dfrac{\widetilde{I}_{\lambda_1}(\gamma\mu)}{\widetilde{I}_{\lambda_1}(\gamma\eta_1)}-\dfrac{\widetilde{K}_{\lambda_1}(\gamma\mu)}{\widetilde{K}_{\lambda_1}(\gamma\eta_1)} & N_1(\nu)=\dfrac{\widetilde{J}_{\lambda_1}(\gamma\nu)}{\widetilde{J}_{\lambda}(\gamma\eta_1)}-\dfrac{\widetilde{Y}_{\lambda_1}(\gamma\nu)}{\widetilde{Y}_{\lambda_1}(\gamma\eta_1)}\\ M_2(\mu)=Sin(\lambda_2 Log(\mu)) & N_2(\nu)=Sin(\lambda_2 Log(\nu))\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}\left(\frac{\widetilde{I}_{\lambda_1}(\gamma\mu)}{\widetilde{I}_{\lambda_1}(\gamma\eta_1)}-\frac{\widetilde{K}_{\lambda_1}(\gamma\mu)}{\widetilde{K}_{\lambda_1}(\gamma\eta_1)}\right)\left(\frac{\widetilde{J}_{\lambda_1}(\gamma\nu)}{\widetilde{J}_{\lambda}(\gamma\eta_1)}-\frac{\widetilde{Y}_{\lambda_1}(\gamma\nu)}{\widetilde{Y}_{\lambda_1}(\gamma\eta_1)}\right)Sin(\lambda_2 Log(\mu))Sin(\lambda_2 Log(\nu))=0$$

.

Relation d'orthogonalité entre fonctions propres de type Bessel ou sinus logarithmique et lafonction propre de valeurs propres (0,0), problème de Neumann

Dans le problème de Neumann, la fonction propre de valeurs propres (0,0) est également solution. Il s'agit de la fonction triviale constante, soit 1 par définition. Toujours par le même calcul l'orthogonalité de cette fonction avec les autres fonctions propres est assurée. Dans ce cas on peut également vérifié numériquement que les intégrales s'annule avec les fonctions de type Bessel :

$$\begin{cases} M_1(\mu)=\dfrac{\widetilde{I}_{\lambda_1}(\gamma\mu)}{\widetilde{I}_{\lambda_1}'(\gamma\eta_1)}-\dfrac{\widetilde{K}_{\lambda_1}(\gamma\mu)}{\widetilde{K}_{\lambda_1}'(\gamma\eta_1)} \\ N_1(\nu)=\dfrac{\widetilde{J}_{\lambda_1}(\gamma\nu)}{\widetilde{J}_{\lambda}'(\gamma\eta_1)}-\dfrac{\widetilde{Y}_{\lambda_1}(\gamma\nu)}{\widetilde{Y}_{\lambda_1}'(\gamma\eta_1)} \\ M_2(\mu)=N_2(\nu)=1 \\ \end{cases} \Rightarrow \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \, \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}\left(\frac{\widetilde{I}_{\lambda_1}(\gamma\mu)}{\widetilde{I}_{\lambda_1}'(\gamma\eta_1)}-\frac{\widetilde{K}_{\lambda_1}(\gamma\mu)}{\widetilde{K}_{\lambda_1}'(\gamma\eta_1)}\right)=0 .$$

Pour les fonctions de type sinus logarithmique, il vient :

$$\begin{cases} M_1(\mu)=Cos(\lambda_1 Log(\mu)) \\ N_1(\nu)=Cos(\lambda_1 Log(\nu)) \\ M_2(\mu)=N_2(\nu)=1 \end{cases} \Rightarrow \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \, \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu} Cos(\lambda_1 Log(\mu)) Cos(\lambda_1 Log(\nu))=0 .$$

On peut calculer explicitement ces intégrales et obtenir l'annulation immédiate.

Il ne reste donc plus qu'à trouver les valeurs propres, et notamment vérifier numériquement la relation d'orthogonalité, soit unidimensionnelle, soit bidimensionnelle, sur quelques valeurs propres. Le système formé des deux types de fonctions propres est normalement complet. Il suffit alors de prendre suffisamment de valeurs propres dans le développement en série pour approximer plus ou moins convenablement la solution. Prenons un problème aux limites de Dirichlet, les fonctions propres ont la forme suivante, et donne une solution sous forme de série :

$$M^1_{\lambda,\gamma}(\mu)=\frac{\widetilde{I}_\lambda(\gamma\mu)}{\widetilde{I}_\lambda(\gamma\mu_1)}-\frac{\widetilde{K}_\lambda(\gamma\mu)}{\widetilde{K}_\lambda(\gamma\mu_1)} \quad N^1_{\lambda,\gamma}(\nu)=\frac{\widetilde{J}_\lambda(\gamma\nu)}{\widetilde{J}_\lambda(\gamma\nu_1)}-\frac{\widetilde{Y}_\lambda(\gamma\nu)}{\widetilde{Y}_\lambda(\gamma\nu_1)}$$

$$M^2_{\lambda,\gamma}(\mu)=\frac{\widetilde{J}_\lambda(\gamma\mu)}{\widetilde{J}_\lambda(\gamma\mu_1)}-\frac{\widetilde{Y}_\lambda(\gamma\mu)}{\widetilde{Y}_\lambda(\gamma\mu_1)} \quad N^1_{\lambda,\gamma}(\nu)=\frac{\widetilde{I}_\lambda(\gamma\nu)}{\widetilde{I}_\lambda(\gamma\nu_1)}-\frac{\widetilde{K}_\lambda(\gamma\nu)}{\widetilde{K}_\lambda(\gamma\nu_1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left\|M^1_{\lambda,\gamma}(\mu)N^1_{\lambda,\gamma}(\nu)\right\|^2=\displaystyle\int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \, \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}\left(M^1_{\lambda,\gamma}(\mu)\right)^2\left(N^1_{\lambda,\gamma}(\nu)\right)^2 \\ \left\|M^2_{\lambda,\gamma}(\mu)N^2_{\lambda,\gamma}(\nu)\right\|^2=\displaystyle\int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \, \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}\left(M^2_{\lambda,\gamma}(\mu)\right)^2\left(N^2_{\lambda,\gamma}(\nu)\right)^2 \end{cases}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\begin{Bmatrix} \displaystyle\sum_{(\lambda,\gamma)\in S_1}\frac{M^1_{\lambda,\gamma}(\mu)N^1_{\lambda,\gamma}(\nu)}{\left\|M^1_{\lambda,\gamma}(\mu)N^1_{\lambda,\gamma}(\nu)\right\|}\left(A^1_{\lambda,\gamma}\,Cosh(\lambda\varphi)+B^1_{\lambda,\gamma}\,Sinh(\lambda\varphi)\right) \\ +\displaystyle\sum_{(\lambda,\gamma)\in S_2}\frac{M^2_{\lambda,\gamma}(\mu)N^2_{\lambda,\gamma}(\nu)}{\left\|M^2_{\lambda,\gamma}(\mu)N^2_{\lambda,\gamma}(\nu)\right\|^2}\left(A^2_{\lambda,\gamma}\,Cosh(\lambda\varphi)+B^2_{\lambda,\gamma}\,Sinh(\lambda\varphi)\right) \end{Bmatrix} .$$

Valeurs propres nulles et solutions séparées particulières

Sur les graphes de contour on voit que les iso-courbes se croisent pour des valeurs propres d'argument γ proche de zéro. Ce faisant on retrouve exactement l'un des couples de solution séparée spéciales de l'équation de Laplace. C'est le cas n°8, à savoir lorsque γ->0, on a des développements spécifiques des fonctions de Bessel applicables en première approximation :

$$I_{i\lambda}(\gamma\mu) \approx \frac{1}{\Gamma(1+i\lambda)}\left(\frac{\gamma\mu}{2}\right)^{i\lambda} \propto \mu^{i\lambda} \propto e^{i\lambda Log(\mu)} = ACos(\lambda Log(\mu)) + BSin(\lambda Log(\mu))$$
$$\Rightarrow K_{i\lambda}(\gamma\mu) \approx ACos(\lambda Log(\mu)) + BSin(\lambda Log(\mu))$$
$$J_{i\lambda}(\gamma\nu) \approx \frac{1}{\Gamma(1+i\lambda)}\left(\frac{\gamma\nu}{2}\right)^{i\lambda} \propto ACos(\lambda Log(\nu)) + BSin(\lambda Log(\nu))$$
$$\Rightarrow J_{-i\lambda}(\gamma\nu) \propto ACos(\lambda Log(\nu)) + BSin(\lambda Log(\nu))$$

.

Si l'on prend ces fonctions limites et si l'on simplifie en prenant : $\mu_2 = \nu_2 = \eta_2 \quad et \quad \mu_1 = \nu_1 = \eta_1$ *alors le système d'équations transcendantales se réduit à une seule équation que l'on soit dans un problème de Dirichlet ou un problème de Neumann à savoir :*

$$\frac{Cos(\lambda Log(\eta_2))}{Cos(\lambda Log(\eta_1))} = \frac{Sin(\lambda Log(\eta_2))}{Sin(\lambda Log(\eta_1))} \Rightarrow Tan(\lambda Log(\eta_2)) = Tan(\lambda Log(\eta_1)) \Rightarrow \lambda Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right) = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)}$$

Ce sont les valeurs que l'on retrouve bien en observant les graphes de contour et les croisements sur l'axe des abscisses λ. La question de l'orthogonalité bidimensionnelle de ces fonctions propres avec les fonctions propres précédentes ne se pose pas, elles est établie par la démonstration précédentes dans les mêmes termes car les valeurs propres λ et donc le couple (λ,0} est distinct d'un quelconque couple des autres fonctions propres. La forme la plus commode des fonctions propres est la suivante de le cas d'un problème homogène de Dirichlet aux limites du domaine :

$$\lambda = \frac{n\pi}{Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)} \quad M_\lambda(\mu) = Sin\left(\lambda Log\left(\frac{\mu}{\eta_1}\right)\right) \quad N_\lambda(\nu) = Sin\left(\lambda Log\left(\frac{\nu}{\eta_1}\right)\right).$$

Dans le cas d'un problème de Neumann, ce sont les dérivées qui doivent s'annuler, il vient donc une forme :

$$\lambda = \frac{n\pi}{Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)} \quad M_\lambda(\mu) = Cos\left(\lambda Log\left(\frac{\mu}{\eta_1}\right)\right) \quad N_\lambda(\nu) = Cos\left(\lambda Log\left(\frac{\nu}{\eta_1}\right)\right)$$

Calculons la norme bidimensionnelle de ces fonctions propres dans ce cas :

$$\|M_\lambda(\mu)N_\lambda(\nu)\|^2 = \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\mu \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\nu \, \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu} (M_\lambda(\mu))^2 (N_\lambda(\nu))^2$$

$$M_\lambda(\mu) = Sin\left(\lambda Log\left(\frac{\mu}{\eta_1}\right)\right) \quad N_\lambda(\nu) = Sin\left(\lambda Log\left(\frac{\nu}{\eta_1}\right)\right) \quad Posons \quad \mu = u\eta_1 \quad \nu = v\eta_1$$

$$\|M_\lambda(\mu)N_\lambda(\nu)\|^2 = \eta_1^2 \int_1^{\frac{\eta_2}{\eta_1}} du \int_1^{\frac{\eta_2}{\eta_1}} dv \left(\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\right) Sin^2(\lambda Log(u)) Sin^2(\lambda Log(v))$$

$$= 2\eta_1^2 \int_1^{\frac{\eta_2}{\eta_1}} du\, u Sin^2(\lambda Log(u)) \int_1^{\frac{\eta_2}{\eta_1}} dv \frac{Sin^2(\lambda Log(v))}{v}$$

$$Posons \quad x = Log(u) \Rightarrow u = e^x \quad y = Log(v) \Rightarrow v = e^y$$

$$\int_1^{\frac{\eta_2}{\eta_1}} du\, u Sin^2(\lambda Log(u)) = \int_0^{Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)} dx\, e^{2x} Sin^2(\lambda x) = \frac{\lambda^2}{4(1+\lambda^2)}\left(\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)^2 - 1\right)$$

$$\int_1^{\frac{\eta_2}{\eta_1}} du \frac{Sin^2(\lambda Log(u))}{u} = \int_0^{Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)} dx\, Sin^2(\lambda x) = \frac{1}{2} Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)$$

$$\Rightarrow \|M_\lambda(\mu)N_\lambda(\nu)\|^2 = \frac{\lambda^2(\eta_2^2-\eta_1^2)}{4(1+\lambda^2)} Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right) = \frac{n\lambda\pi(\eta_2^2-\eta_1^2)}{4(1+\lambda^2)} \quad avec \quad \lambda = \frac{n\pi}{Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)}$$

$$Egalement \quad \|M_\lambda(\mu)N_\lambda(\nu)\|^2 = 2\eta_1^2 \int_1^{\frac{\eta_2}{\eta_1}} du\, u Cos^2(\lambda Log(u)) \int_1^{\frac{\eta_2}{\eta_1}} dv \frac{Cos^2(\lambda Log(v))}{v}$$

$$\int_1^{\frac{\eta_2}{\eta_1}} du\, u Cos^2(\lambda Log(u)) = \int_0^{Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)} dx\, e^{2x} Cos^2(\lambda x) = \int_0^{Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)} dx\, e^{2x}(1 - Sin^2(\lambda x)) = \frac{2+\lambda^2}{4(1+\lambda^2)}\left(\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)^2 - 1\right)$$

$$\int_1^{\frac{\eta_2}{\eta_1}} du \frac{Cos^2(\lambda Log(u))}{u} = \int_0^{Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)} dx\, Cos^2(\lambda x) = \frac{1}{2} Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)$$

$$\Rightarrow \|M_\lambda(\mu)N_\lambda(\nu)\|^2 = \frac{2+\lambda^2}{4(1+\lambda^2)}(\eta_2^2-\eta_1^2) Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right) \quad avec \quad \lambda = \frac{n\pi}{Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)}$$

.

Et pour les coefficients d'un développement en série sur une fonction limite constante, nous devrions calculer les intégrales suivantes :

$$A_\lambda = \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\mu \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\nu \, \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu} Sin\left(\lambda Log\left(\frac{\mu}{\eta_1}\right)\right) Sin\left(\lambda Log\left(\frac{\nu}{\eta_1}\right)\right)$$

$$ou \quad A_\lambda = \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\mu \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\nu \, \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu} Cos\left(\lambda Log\left(\frac{\mu}{\eta_1}\right)\right) Cos\left(\lambda Log\left(\frac{\nu}{\eta_1}\right)\right)$$

$$A_\lambda = 2\eta_1^2 \int_1^{\frac{\eta_2}{\eta_1}} du \, u Sin(\lambda Log(u)) \int_1^{\frac{\eta_2}{\eta_1}} dv \, \frac{Sin(\lambda Log(v))}{v}$$

$$ou \quad A_\lambda = 2\eta_1^2 \int_1^{\frac{\eta_2}{\eta_1}} du \, u Cos(\lambda Log(u)) \int_1^{\frac{\eta_2}{\eta_1}} dv \, \frac{Cos(\lambda Log(v))}{v}$$

$$Posons \quad x = Log(u) \Rightarrow u = e^x \quad y = Log(v) \Rightarrow v = e^y$$

$$\int_1^{\frac{\eta_2}{\eta_1}} du \, u Sin(\lambda Log(u)) = \frac{\lambda}{\eta_1^2} \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2 Cos\left(\lambda Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)\right)}{4+\lambda^2} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\eta_1^2} \frac{\eta_1^2+\eta_2^2}{4+\lambda^2} \; si\ n\ impair \\ \frac{\lambda}{\eta_1^2} \frac{\eta_1^2-\eta_2^2}{4+\lambda^2} \; si\ n\ pair \end{cases}$$

$$\int_1^{\frac{\eta_2}{\eta_1}} du \, u Cos(\lambda Log(u)) = -\frac{2}{\eta_1^2} \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2 Cos\left(\lambda Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)\right)}{4+\lambda^2} = \begin{cases} -\frac{2}{\eta_1^2} \frac{\eta_1^2+\eta_2^2}{4+\lambda^2} \; si\ n\ impair \\ \frac{2}{\eta_1^2} \frac{\eta_2^2-\eta_1^2}{4+\lambda^2} \; si\ n\ pair \end{cases}$$

$$\int_1^{\frac{\eta_2}{\eta_1}} du \, \frac{Sin(\lambda Log(u))}{u} = \frac{1 - Cos\left(\lambda Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)\right)}{\lambda} = \begin{cases} \frac{2}{\lambda} \; si\ n\ impair \\ 0 \; si\ n\ pair \end{cases} \qquad \int_1^{\frac{\eta_2}{\eta_1}} du \, \frac{Cos(\lambda Log(u))}{u} = \frac{Sin\left(\lambda Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)\right)}{\lambda} = 0$$

.

__Résolution numérique de l'équation transcendantale du problème de Dirichlet et approximation des fonctions pour des ordres et des arguments grands__

L'équation transcendantale a la forme suivante :

$$\gamma,\lambda \quad \textit{tels que} \quad \frac{\mathrm{Re}\{I_{i\lambda}(\gamma\mu_2)\}}{\mathrm{Re}\{I_{i\lambda}(\gamma\mu_1)\}}=\frac{K_{i\lambda}(\gamma\mu_2)}{K_{i\lambda}(\gamma\mu_1)} \quad et \quad \frac{\mathrm{Re}\{J_{i\lambda}(\gamma\nu_2)\}}{\mathrm{Re}\{J_{i\lambda}(\gamma\nu_1)\}}=\frac{\mathrm{Im}\{J_{i\lambda}(\gamma\nu_2)\}}{\mathrm{Im}\{J_{i\lambda}(\gamma\nu_1)\}}$$

L'étude des divers comportements asymptotiques des fonctions de Bessel et Bessel modifiées montre que le comportement asymptotique est en fait très vite atteint dès la première approximation. Prenons tout d'abord la deuxième équation transcendantale qui a l'avantage d'admettre un expression asymptotique assez simple en fonctions sinusoïdales :

$$\zeta(z)=\sqrt{1+z^2}+Log\left(\frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}\right) \quad \begin{cases} \widetilde{J}_\tau(\tau\, z)=\mathrm{Re}(J_{i\tau}(\tau\, z))\approx\sqrt{\dfrac{1}{2\pi\tau}}e^{\frac{\pi\tau}{2}}\left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)^{\frac{1}{4}}Cos\left(\tau\zeta(z)-\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \widetilde{Y}_\tau(\tau\, z)=\mathrm{Im}(J_{i\tau}(\tau\, z))\approx\sqrt{\dfrac{1}{2\pi\tau}}e^{\frac{\pi\tau}{2}}\left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)^{\frac{1}{4}}Sin\left(\tau\zeta(z)-\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}.$$

$$\xi(z,\tau)=\frac{\sqrt{\tau^2+z^2}}{\tau}+Log\left(\frac{z}{\tau+\sqrt{\tau^2+z^2}}\right) \quad \begin{cases} \widetilde{J}_\tau(z)\approx\sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}e^{\frac{\pi\tau}{2}}\left(\dfrac{1}{\tau^2+z^2}\right)^{\frac{1}{4}}Cos\left(\tau\xi(z,\tau)-\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \widetilde{Y}_\tau(z)\approx\sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}e^{\frac{\pi\tau}{2}}\left(\dfrac{1}{\tau^2+z^2}\right)^{\frac{1}{4}}Sin\left(\tau\xi(z,\tau)-\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Cela donne en injectant dans la deuxième équation transcendantale :

$$\xi(z,\tau)=\frac{\sqrt{\tau^2+z^2}}{\tau}+Log\left(\frac{z}{\tau+\sqrt{\tau^2+z^2}}\right) \quad \begin{cases} \widetilde{J}_\tau(z)\approx\sqrt{\dfrac{1}{2\pi\tau}}e^{\frac{\pi\tau}{2}}\left(\dfrac{\tau^2}{\tau^2+z^2}\right)^{\frac{1}{4}}Cos\left(\tau\xi(z,\tau)-\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \widetilde{Y}_\tau(z)\approx\sqrt{\dfrac{1}{2\pi\tau}}e^{\frac{\pi\tau}{2}}\left(\dfrac{\tau^2}{\tau^2+z^2}\right)^{\frac{1}{4}}Sin\left(\tau\xi(z,\tau)-\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\frac{\widetilde{J}_\lambda(\gamma\nu_2)}{\widetilde{J}_\lambda(\gamma\nu_1)}=\frac{\widetilde{Y}_\lambda(\gamma\nu_2)}{\widetilde{Y}_\lambda(\gamma\nu_1)}\Rightarrow\frac{Cos\left(\lambda\xi(\gamma\nu_2,\lambda)-\dfrac{\pi}{4}\right)}{Cos\left(\lambda\xi(\gamma\nu_1,\lambda)-\dfrac{\pi}{4}\right)}=\frac{Sin\left(\lambda\xi(\gamma\nu_2,\lambda)-\dfrac{\pi}{4}\right)}{Sin\left(\lambda\xi(\gamma\nu_1,\lambda)-\dfrac{\pi}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow Tan\left(\lambda\xi(\gamma\nu_1,\lambda)-\frac{\pi}{4}\right)=Tan\left(\lambda\xi(\gamma\nu_2,\lambda)-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\lambda(\xi(\gamma\nu_2,\lambda)-\xi(\gamma\nu_1,\lambda))=\pm n\pi$$

$$\xi(\gamma\nu_2,\lambda)-\xi(\gamma\nu_1,\lambda)=\frac{\sqrt{\lambda^2+\gamma^2{\nu_2}^2}-\sqrt{\lambda^2+\gamma^2{\nu_1}^2}}{\lambda}+Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+\gamma^2{\nu_1}^2}}{\lambda+\sqrt{\lambda^2+\gamma^2{\nu_2}^2}}\right)$$

$$Posons \quad \omega=\frac{\lambda}{\gamma}\Rightarrow\xi(\gamma\nu_2,\lambda)-\xi(\gamma\nu_1,\lambda)=Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{\omega+\sqrt{\omega^2+{\nu_1}^2}}{\omega+\sqrt{\omega^2+{\nu_2}^2}}\right)+\frac{\sqrt{\omega^2+{\nu_2}^2}-\sqrt{\omega^2+{\nu_1}^2}}{\omega}$$

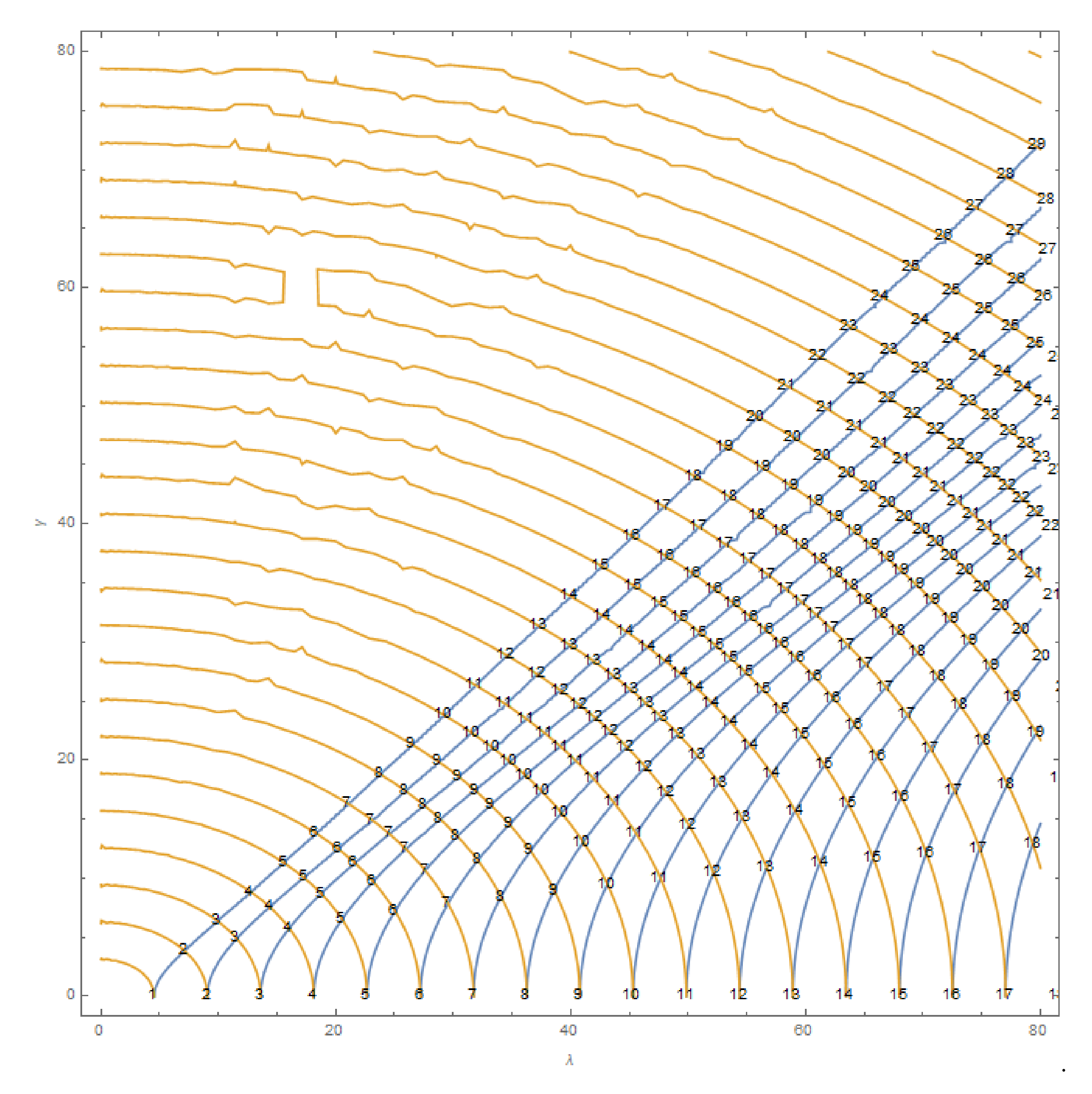
$$\Rightarrow Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{\omega+\sqrt{\omega^2+{\nu_1}^2}}{\omega+\sqrt{\omega^2+{\nu_2}^2}}\right)+\frac{\sqrt{\omega^2+{\nu_2}^2}-\sqrt{\omega^2+{\nu_1}^2}}{\omega}=\pm\frac{n\pi}{\lambda}$$

Etant donné que la fonction du membre droit est décroissante et toujours positive, avec une asymptote en ω=0, il n'y a pour chaque valeur de n qu'une seule courbe possible décrivant la solution de la deuxième équation transcendantales :

$$Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{\omega+\sqrt{\omega^2+\nu_1^{\ 2}}}{\omega+\sqrt{\omega^2+\nu_2^{\ 2}}}\right)+\frac{\sqrt{\omega^2+\nu_2^{\ 2}}-\sqrt{\omega^2+\nu_1^{\ 2}}}{\omega}=\frac{n\pi}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{\omega+\sqrt{\omega^2+\nu_1^{\ 2}}}{\omega+\sqrt{\omega^2+\nu_2^{\ 2}}}\right)+\frac{\sqrt{\omega^2+\nu_2^{\ 2}}-\sqrt{\omega^2+\nu_1^{\ 2}}}{\omega}}.$$

On a pu vérifier à l'aide d'un programme numérique déterminant graphiquement les valeurs propres que cette relation est bien vérifiée sur le système d'équation transcendantales originales non simplifiées. Voici le graphique sur lequel on a reporté les valeurs entières correspondantes :



.

On voit immédiatement comment se répartissent les valeurs de n à chaque croisement correspondant à un couple de valeur propre (λ,γ). Cela donne alors une indexation naturelle pour ordonner les couples de valeurs propres et construire les fonctions propres du problème aux limites. Remarquons également que pour les valeurs n croissantes il y a exactement n couples de valeurs propres (λ,γ) à retenir. Cela est important et va s'expliquer notamment en étudiant la forme simplifiée de la première équation transcendantale.

Pour la première équation transcendantale donnons le comportement asymptotique en première approximation des fonctions BesselK et Re[Bessel-I] (ces approximations sont tirées de l'article de Dunster de 1990 « Bessel Functions of Purely Imaginary Order » en revenant aux fonctions originales de Bessel modifées) :

$$\zeta=\zeta(z) \quad \textit{tel que} \quad \begin{cases} \zeta(z)=\left[\dfrac{3}{2}\left\{Log\left(\dfrac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)-\sqrt{1-z^2}\right\}\right]^{\frac{2}{3}} & z<1 \\ \zeta(z)=-\left[\dfrac{3}{2}\left\{\sqrt{z^2-1}-ArcSec(z)\right\}\right]^{\frac{2}{3}} & z>1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_{i\tau}(\tau z)\approx \dfrac{\pi e^{-\frac{\pi\tau}{2}}\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\dfrac{\zeta(z)}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta(z)\right) \\ \mathrm{Re}\left(I_{i\tau}(\tau z)\right)\approx \dfrac{e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{\sqrt{2}\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\dfrac{\zeta(z)}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} Bi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta(z)\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_{i\tau}(z)=\widetilde{K}_{i\tau}(z)\approx \pi e^{-\frac{\pi\tau}{2}}\sqrt{2}\tau^{\frac{1}{6}}\left(\dfrac{\zeta\left(\frac{z}{\tau}\right)}{\tau^2-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\dfrac{z}{\tau}\right)\right) \\ \mathrm{Re}\left(I_{i\tau}(z)\right)=\widetilde{I}_{i\tau}(z)\approx \dfrac{e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{\sqrt{2}}\tau^{\frac{1}{6}}\left(\dfrac{\zeta\left(\frac{z}{\tau}\right)}{\tau^2-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} Bi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\dfrac{z}{\tau}\right)\right) \end{cases}$$

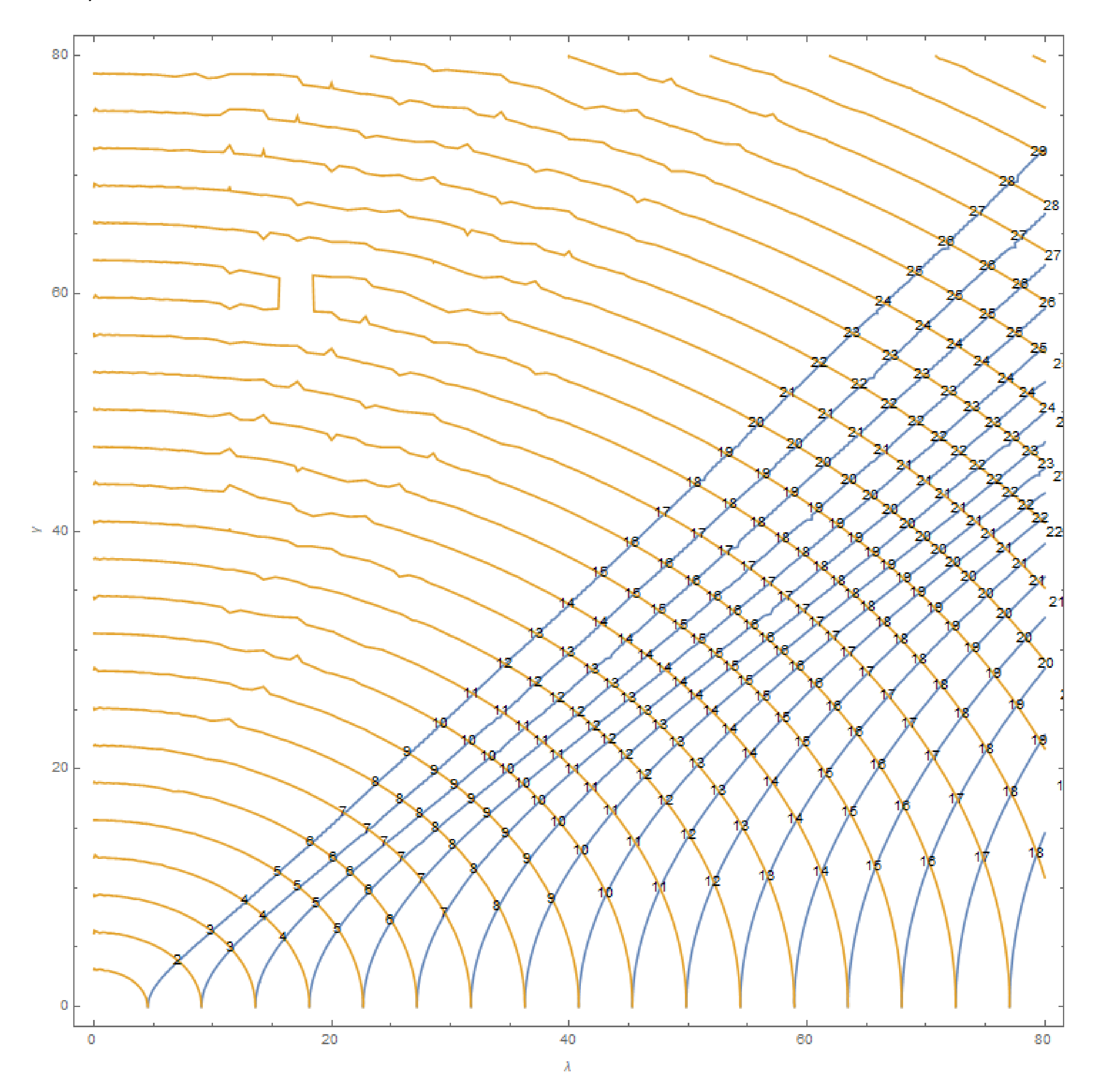
La première équation transcendantale donne donc très simplement :

$$\omega=\frac{\lambda}{\gamma}\Rightarrow\frac{\widetilde{I}_\lambda(\gamma\mu_2)}{\widetilde{I}_\lambda(\gamma\mu_1)}=\frac{\widetilde{K}_\lambda(\gamma\mu_2)}{\widetilde{K}_\lambda(\gamma\mu_1)}\Rightarrow\frac{Bi\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\gamma\mu_2}{\lambda}\right)\right)}{Bi\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\gamma\mu_1}{\lambda}\right)\right)}=\frac{Ai\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\gamma\mu_2}{\lambda}\right)\right)}{Ai\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\gamma\mu_1}{\lambda}\right)\right)}\Rightarrow\frac{Bi\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\mu_2}{\omega}\right)\right)}{Bi\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\mu_1}{\omega}\right)\right)}=\frac{Ai\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\mu_2}{\omega}\right)\right)}{Ai\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\mu_1}{\omega}\right)\right)}$$

Sachant que $\lambda=\dfrac{n\pi}{Log\left(\dfrac{\nu_2}{\nu_1}\dfrac{\omega+\sqrt{\omega^2+\nu_1{}^2}}{\omega+\sqrt{\omega^2+\nu_2{}^2}}\right)+\dfrac{\sqrt{\omega^2+\nu_2{}^2}-\sqrt{\omega^2+\nu_1{}^2}}{\omega}}$

L'équation est donc devenue une simple équation d'inconnue ω pour un n donné. Une résolution numérique de cette équation transcendantale montre qu'il y exactement n solutions de ω. Les n-1 premières valeurs ω ordonnées sont en général de valeur limitée tandis que la n-ième valeur est très grande et augmente avec n. Il est clair qu'en réalité la n-ième valeur de ω très grande correspond à une valeur de γ =λ/ω très faible, on ne peut donc l'identifier en réalité qu'à la valeur propre nulle γ=0, soit une valeur de λ telle que : $\lambda=\dfrac{n\pi}{Log\left(\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\right)}$*. Et ces valeurs correspondent sur le graphique de contour aux croisements situés sur l'axe des abscisses.*

La résolution numérique du système d'équations transcendantales simplifiées permet de construire une suite indexée de couple de valeur propres qui correspondent très bien à l'emplacement de tous les croisements du graphe de contour, comme illustré ci-dessous avec l'indexation primaire n (ici de 2 à 29) :



Résolution numérique de l'équation transcendantale du problème de Neumann et approximation des dérivées premières des fonctions pour des ordres et des arguments grands

L'équation transcendantale a la forme suivante :

$$\gamma,\lambda \quad tels\ que \quad \frac{\mathrm{Re}\{I_{i\lambda}'(\gamma\mu_2)\}}{\mathrm{Re}\{I_{i\lambda}'(\gamma\mu_1)\}}=\frac{K_{i\lambda}'(\gamma\mu_2)}{K_{i\lambda}'(\gamma\mu_1)} \quad et \quad \frac{\mathrm{Re}\{J_{i\lambda}'(\gamma\nu_2)\}}{\mathrm{Re}\{J_{i\lambda}'(\gamma\nu_1)\}}=\frac{\mathrm{Im}\{J_{i\lambda}'(\gamma\nu_2)\}}{\mathrm{Im}\{J_{i\lambda}'(\gamma\nu_1)\}}$$

L'étude des divers comportements asymptotiques des dérivées premières des fonctions de Bessel et Bessel modifiées montre que le comportement asymptotique est en fait très vite atteint dès la première approximation. Prenons tout d'abord la deuxième équation transcendantale qui a l'avantage d'admettre un expression asymptotique assez simple en fonctions sinusoïdales :

$$\zeta(z)=\sqrt{1+z^2}+Log\left(\frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}\right) \quad \begin{cases} \mathrm{Re}\{J_{i\tau}'(\tau z)\}\approx -\dfrac{e^{\frac{\pi\tau}{2}}\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}{z\sqrt{2\pi\tau}}Sin\left(\tau\zeta-\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \mathrm{Im}\{J_{i\tau}'(\tau z)\}\approx \dfrac{e^{\frac{\pi\tau}{2}}\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}{z\sqrt{2\pi\tau}}Cos\left(\tau\zeta-\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}.$$

$$\xi(z,\tau)=\frac{\sqrt{\tau^2+z^2}}{\tau}+Log\left(\frac{z}{\tau+\sqrt{\tau^2+z^2}}\right) \quad \begin{cases} \mathrm{Re}\{J_{i\tau}'(z)\}\approx -\dfrac{e^{\frac{\pi\tau}{2}}\left(\tau^2+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}{z\sqrt{2\pi}}Sin\left(\tau\xi(z,\tau)-\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \mathrm{Im}\{J_{i\tau}'(z)\}\approx \dfrac{e^{\frac{\pi\tau}{2}}\left(\tau^2+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}{z\sqrt{2\pi}}Cos\left(\tau\xi(z,\tau)-\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Cela donne en injectant dans la deuxième équation transcendantale exactement la même expression que précédemment :

$$\frac{\mathrm{Re}\{J_{i\lambda}'(\gamma\nu_2)\}}{\mathrm{Re}\{J_{i\lambda}'(\gamma\nu_1)\}}=\frac{\mathrm{Im}\{J_{i\lambda}'(\gamma\nu_2)\}}{\mathrm{Im}\{J_{i\lambda}'(\gamma\nu_1)\}}\Rightarrow\frac{Sin\left(\lambda\xi(\gamma\nu_2,\lambda)-\frac{\pi}{4}\right)}{Sin\left(\lambda\xi(\gamma\nu_1,\lambda)-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{Cos\left(\lambda\xi(\gamma\nu_2,\lambda)-\frac{\pi}{4}\right)}{Cos\left(\lambda\xi(\gamma\nu_1,\lambda)-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow Tan\left(\lambda\xi(\gamma\nu_1,\lambda)-\frac{\pi}{4}\right)=Tan\left(\lambda\xi(\gamma\nu_2,\lambda)-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\lambda\left(\xi(\gamma\nu_2,\lambda)-\xi(\gamma\nu_1,\lambda)\right)=\pm n\pi$$

$$\xi(\gamma\nu_2,\lambda)-\xi(\gamma\nu_1,\lambda)=\frac{\sqrt{\lambda^2+\gamma^2\nu_2^{\,2}}-\sqrt{\lambda^2+\gamma^2\nu_1^{\,2}}}{\lambda}+Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+\gamma^2\nu_1^{\,2}}}{\lambda+\sqrt{\lambda^2+\gamma^2\nu_2^{\,2}}}\right)$$

$$Posons \quad \omega=\frac{\lambda}{\gamma}\Rightarrow\xi(\gamma\nu_2,\lambda)-\xi(\gamma\nu_1,\lambda)=Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{\omega+\sqrt{\omega^2+\nu_1^{\,2}}}{\omega+\sqrt{\omega^2+\nu_2^{\,2}}}\right)+\frac{\sqrt{\omega^2+\nu_2^{\,2}}-\sqrt{\omega^2+\nu_1^{\,2}}}{\omega}$$

$$\Rightarrow Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{\omega+\sqrt{\omega^2+\nu_1^{\,2}}}{\omega+\sqrt{\omega^2+\nu_2^{\,2}}}\right)+\frac{\sqrt{\omega^2+\nu_2^{\,2}}-\sqrt{\omega^2+\nu_1^{\,2}}}{\omega}=\pm\frac{n\pi}{\lambda}$$

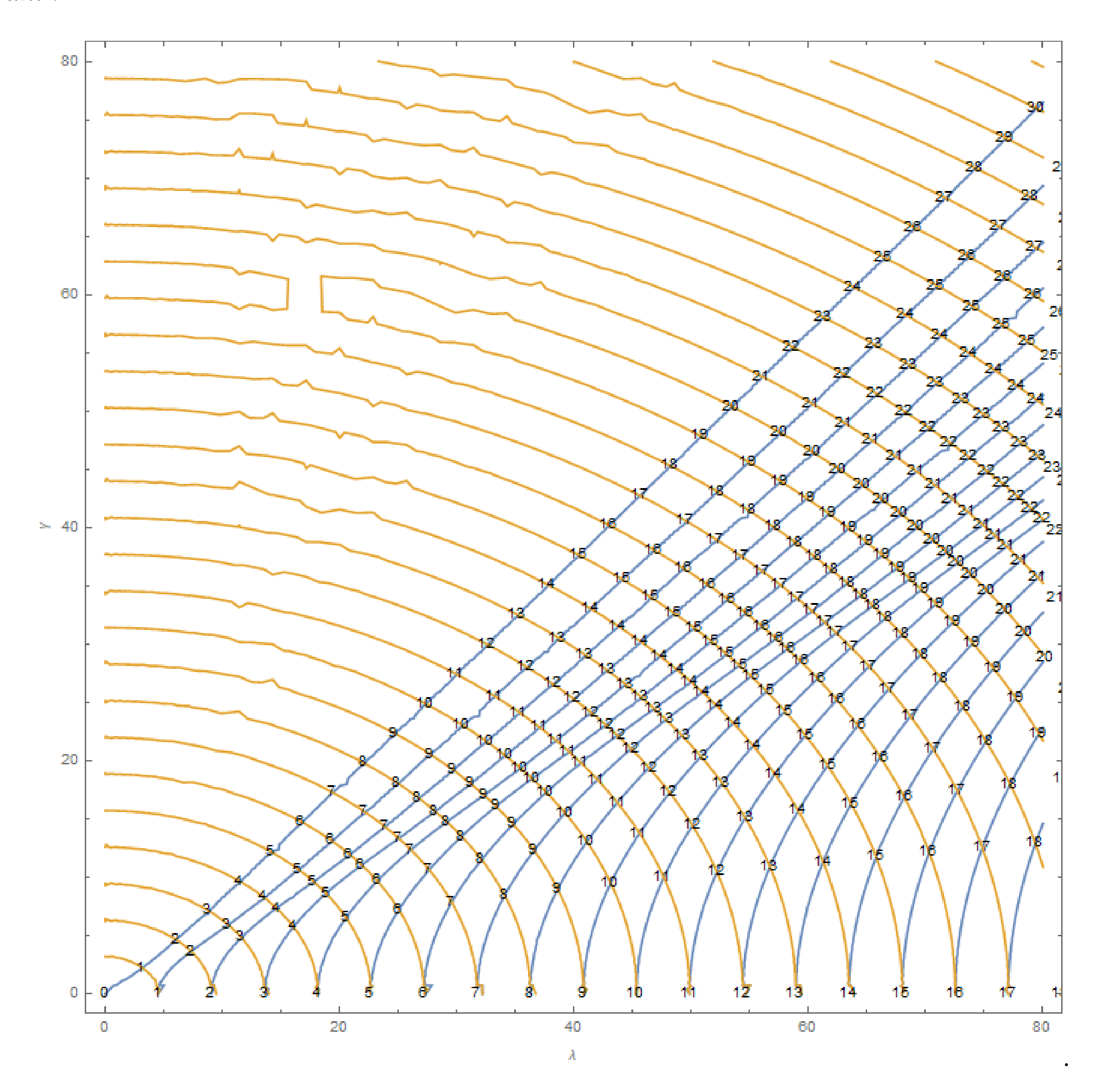
.

Etant donné que la fonction du membre droit est décroissante et toujours positive, avec une asymptote en ω=0, il n'y a pour chaque valeur de n qu'une seule courbe possible décrivant la solution de la deuxième équation transcendantales :

$$Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{\omega+\sqrt{\omega^2+\nu_1{}^2}}{\omega+\sqrt{\omega^2+\nu_2{}^2}}\right)+\frac{\sqrt{\omega^2+\nu_2{}^2}-\sqrt{\omega^2+\nu_1{}^2}}{\omega}=\frac{n\pi}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{\omega+\sqrt{\omega^2+\nu_1{}^2}}{\omega+\sqrt{\omega^2+\nu_2{}^2}}\right)+\frac{\sqrt{\omega^2+\nu_2{}^2}-\sqrt{\omega^2+\nu_1{}^2}}{\omega}}.$$

On a pu vérifier à l'aide d'un programme numérique déterminant graphiquement les valeurs propres que cette relation est très bien vérifiée avec des valeurs propres déterminées numériquement par le système d'équation originale, comme indiqué sur le graphe de contour suivant :



.

Pour la première équation donnons le comportement asymptotique en première approximation des dérivées premières des fonctions Bessel-K et Re[Bessel-I] :

$$\zeta=\zeta(z)\quad \text{tel que}\quad \begin{cases}\zeta(z)=\left[\dfrac{3}{2}\left\{Log\left(\dfrac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)-\sqrt{1-z^2}\right\}\right]^{\frac{2}{3}} & z<1\\ \zeta(z)=-\left[\dfrac{3}{2}\left\{\sqrt{z^2-1}-ArcSec(z)\right\}\right]^{\frac{2}{3}} & z>1\end{cases}$$

$$\begin{cases}K_{i\tau}'(\tau z)=\dfrac{\pi e^{-\frac{\pi\tau}{2}}\sqrt{2}}{z\tau^{\frac{2}{3}}}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\\ \mathrm{Re}(I_{i\tau}'(\tau z))\approx\dfrac{e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{z\sqrt{2}\tau^{\frac{2}{3}}}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}Bi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}K_{i\tau}'(z)=\widetilde{K}_{i\tau}'(z)\approx\dfrac{\pi e^{-\frac{\pi\tau}{2}}\sqrt{2}}{z\tau^{\frac{1}{6}}}\left(\dfrac{\zeta\left(\frac{z}{\tau}\right)}{\tau^2-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\dfrac{z}{\tau}\right)\right)\\ \mathrm{Re}(I_{i\tau}'(z))=\widetilde{I}_{i\tau}'(z)\approx\dfrac{e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{z\tau^{\frac{1}{6}}\sqrt{2}}\left(\dfrac{\zeta\left(\frac{z}{\tau}\right)}{\tau^2-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}Bi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\dfrac{z}{\tau}\right)\right)\end{cases}$$

La première équation transcendantale simplifiée donne donc :

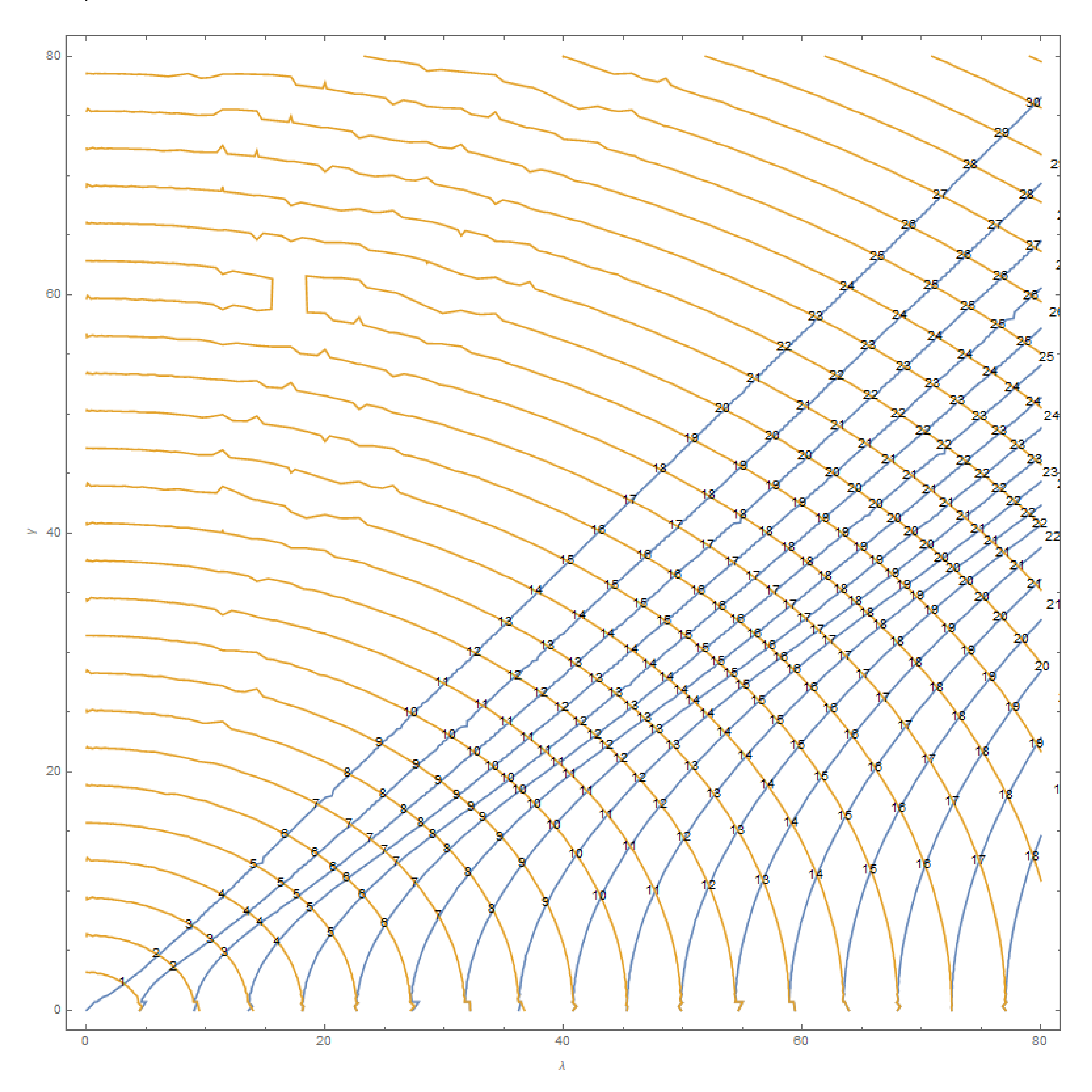
$$\omega=\frac{\lambda}{\gamma}\Rightarrow\frac{\mathrm{Re}\{I_{i\lambda}'(\gamma\mu_2)\}}{\mathrm{Re}\{I_{i\lambda}'(\gamma\mu_1)\}}=\frac{K_{i\lambda}'(\gamma\mu_2)}{K_{i\lambda}'(\gamma\mu_1)}\Rightarrow\frac{Bi'\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\gamma\mu_2}{\lambda}\right)\right)}{Bi'\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\gamma\mu_1}{\lambda}\right)\right)}=\frac{Ai'\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\gamma\mu_2}{\lambda}\right)\right)}{Ai'\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\gamma\mu_1}{\lambda}\right)\right)}$$

$$\Rightarrow\frac{Bi'\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\mu_2}{\omega}\right)\right)}{Bi'\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\mu_1}{\omega}\right)\right)}=\frac{Ai'\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\mu_2}{\omega}\right)\right)}{Ai'\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\mu_1}{\omega}\right)\right)}\quad \text{Sachant que}\quad \lambda=\frac{n\pi}{Log\left(\dfrac{\nu_2}{\nu_1}\dfrac{\omega+\sqrt{\omega^2+\nu_1^{\,2}}}{\omega+\sqrt{\omega^2+\nu_2^{\,2}}}\right)+\dfrac{\sqrt{\omega^2+\nu_2^{\,2}}-\sqrt{\omega^2+\nu_1^{\,2}}}{\omega}}$$

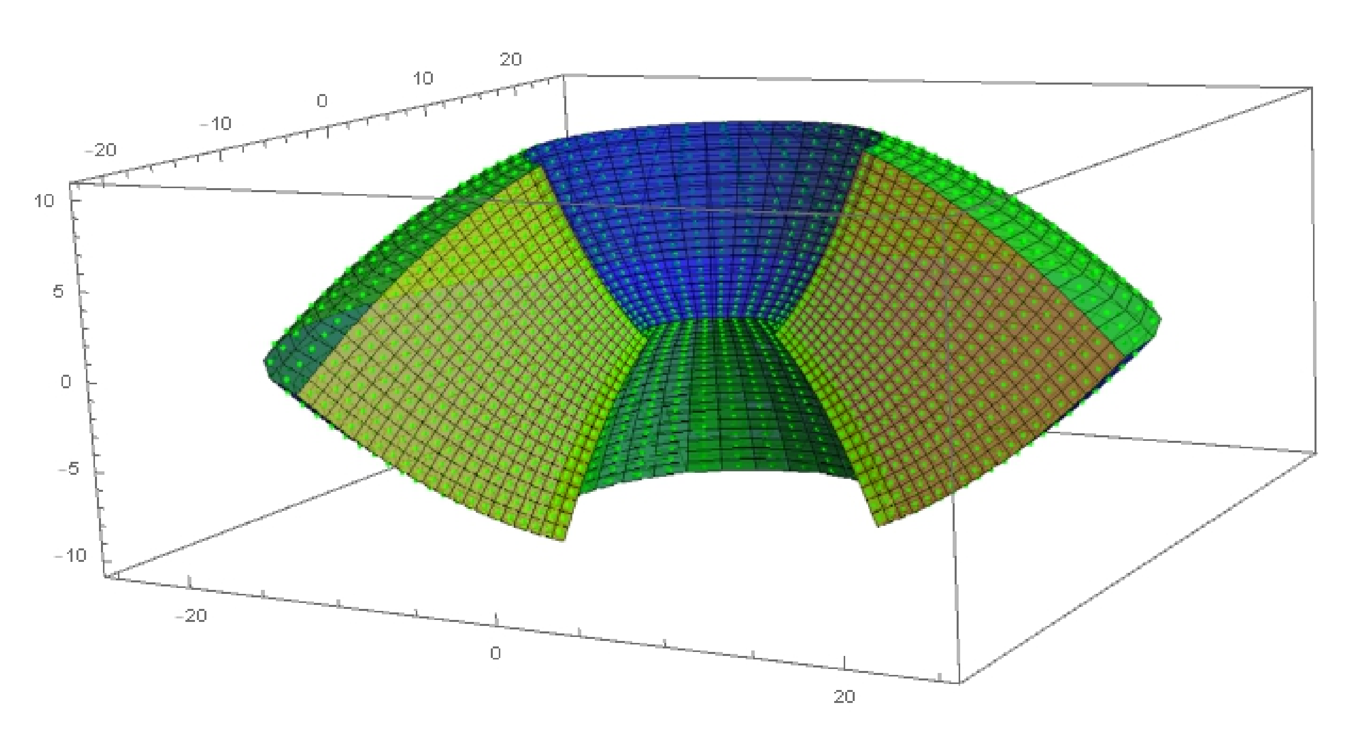
L'équation est donc devenue une simple équation d'inconnue ω pour un n donné. Une résolution numérique de cette équation transcendantale montre qu'il y exactement n+1 solutions de ω, cette fois-ci. Les n premières valeurs ω ordonnées sont en général de valeur limitée tandis que la n+1-ième valeur est très grande et augmente avec n. Il est clair qu'en réalité la n+1-ième valeur de ω très grande correspond à une valeur de γ =λ/ω très faible, on ne peut donc l'identifier en réalité qu'à la valeur propre nulle γ=0, soit une valeur de λ telle que : $\lambda=\dfrac{n\pi}{Log\left(\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\right)}$*. Et ces valeurs correspondent sur le graphique de contour aux croisements situés sur l'axe des abscisses. Dans le problème de Neumann, on doit également retenir la solution pour n=0, qui est la solution de valeurs propres nulles* (λ,γ)=(0,0). *Ces valeurs propres nulles compte tenu des conditions aux limites correspondent à une solution constante en μ,ν et linéaire en φ. Soit une fonction de la forme :n*

$$T(\mu,\nu,\varphi)=A+B\varphi\cdot$$

La résolution numérique du système d'équations transcendantales simplifiées permet de construire une suite indexée de couple de valeur propres qui correspondent très bien à l'emplacement de tous les croisements du graphe de contour, comme illustré ci-dessous avec l'indexation primaire n (ici de 1 à 30) :



Simulation numérique de la construction des solutions du problèmes aux limites inhomogène azimutal de Dirichlet sur un secteur angulaire azimutale de paraboloïde de révolution tronqué symétrique



Il s'agit du problème suivant entièrement symétrique :

$$\mu_1 = \nu_1 = \eta_1 \quad \mu_2 = \nu_2 = \eta_2$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\mu=\mu_1} = T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\mu=\mu_2} = T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_1} = T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_2} = 0$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=0} = T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_0} = f(\mu,\nu)$$

Les fonctions propres pour des valeurs de γ non nulles ainsi que les normes sont de la forme :

$$\text{Pour} \quad \gamma \neq 0$$

$$M^1_{\lambda,\gamma}(\mu) = \frac{\mathrm{Re}(I_{i\lambda}(\gamma\mu))}{\mathrm{Re}(I_{i\lambda}(\gamma\eta_1))} - \frac{\mathrm{Re}(K_{i\lambda}(\gamma\mu))}{\mathrm{Re}(K_{i\lambda}(\gamma\eta_1))} \quad N^1_{\lambda,\gamma}(\nu) = \frac{\mathrm{Re}(J_{i\lambda}(\gamma\nu))}{\mathrm{Re}(J_{i\lambda}(\gamma\eta_1))} - \frac{\mathrm{Im}(J_{i\lambda}(\gamma\nu))}{\mathrm{Im}(J_{i\lambda}(\gamma\eta_1))}$$

$$M^2_{\lambda,\gamma}(\mu) = \frac{\mathrm{Re}(J_{i\lambda}(\gamma\mu))}{\mathrm{Re}(J_{i\lambda}(\gamma\eta_1))} - \frac{\mathrm{Im}(J_{i\lambda}(\gamma\mu))}{\mathrm{Im}(J_{i\lambda}(\gamma\eta_1))} \quad N^2_{\lambda,\gamma}(\nu) = \frac{\mathrm{Re}(I_{i\lambda}(\gamma\nu))}{\mathrm{Re}(I_{i\lambda}(\gamma\eta_1))} - \frac{\mathrm{Re}(K_{i\lambda}(\gamma\nu))}{\mathrm{Re}(K_{i\lambda}(\gamma\eta_1))}$$

$$\left\|M^1_{\lambda,\gamma}(\mu)N^1_{\lambda,\gamma}(\nu)\right\|^2 = \left\|M^2_{\lambda,\gamma}(\mu)N^2_{\lambda,\gamma}(\nu)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\, \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu} \left(M^1_{\lambda,\gamma}(\mu)\right)^2 \left(N^1_{\lambda,\gamma}(\nu)\right)^2$$

$$= \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\, \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu} \left(M^2_{\lambda,\gamma}(\mu)\right)^2 \left(N^2_{\lambda,\gamma}(\nu)\right)^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu\, \mu \left(M^1_{\lambda,\gamma}(\mu)\right)^2 \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\, \frac{\left(N^1_{\lambda,\gamma}(\nu)\right)^2}{\nu} + \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu\, \frac{\left(M^1_{\lambda,\gamma}(\mu)\right)^2}{\mu} \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\, \nu \left(N^1_{\lambda,\gamma}(\nu)\right)^2$$

$$= \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu\, \mu \left(M^2_{\lambda,\gamma}(\mu)\right)^2 \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\, \frac{\left(N^2_{\lambda,\gamma}(\nu)\right)^2}{\nu} + \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu\, \frac{\left(M^2_{\lambda,\gamma}(\mu)\right)^2}{\mu} \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\, \nu \left(N^2_{\lambda,\gamma}(\nu)\right)^2$$

Il est important de noter que les deux types de fonctions propres partagent exactement les mêmes couples de valeurs propres (λ,γ). Ceci n'est vrai que dans le cas d'un problème géométriquement symétrique. Les intégrales des normes sont déterminées numériquement.

Lorsque les valeurs de γ sont nulles alors il s'agit de fonctions sinusoïdales logarithmiques avec leur norme respectives :

$$\lambda = \frac{n\pi}{Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)} \quad M_{\lambda,0}(\mu) = Sin\left(\lambda Log\left(\frac{\mu}{\eta_1}\right)\right) \quad N_{\lambda,0}(\nu) = Sin\left(\lambda Log\left(\frac{\nu}{\eta_1}\right)\right)$$

$$\left\| M_{\lambda,0}(\mu) N_{\lambda,0}(\nu) \right\|^2 = \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\mu \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\nu \, \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu} \left(M_{\lambda,0}(\mu)\right)^2 \left(N_{\lambda,0}(\nu)\right)^2 = \frac{\lambda^2\left({\eta_2}^2 - {\eta_1}^2\right)}{4\left(1+\lambda^2\right)} Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)$$

Les valeurs propres forment un couple (λ,γ) dont nous venons de donner les valeurs lorsque γ est nulle, pour les autres valeurs de γ, il s'agit des solutions explicites du couple d'équations transcendantales suivantes :

$$\gamma, \lambda \quad tels\ que \quad \frac{\mathrm{Re}\{I_{i\lambda}(\gamma\eta_2)\}}{\mathrm{Re}\{I_{i\lambda}(\gamma\eta_1)\}} = \frac{\mathrm{Re}\{K_{i\lambda}(\gamma\eta_2)\}}{\mathrm{Re}\{K_{i\lambda}(\gamma\eta_1)\}} \quad et \quad \frac{\mathrm{Re}\{J_{i\lambda}(\gamma\eta_2)\}}{\mathrm{Re}\{J_{i\lambda}(\gamma\eta_1)\}} = \frac{\mathrm{Im}\{J_{i\lambda}(\gamma\eta_2)\}}{\mathrm{Im}\{J_{i\lambda}(\gamma\eta_1)\}}$$

Pour effectuer une indexation des solutions du couple d'équations transcendantales, une fois déterminée une solution (λ,γ), on calcule l'index principal n avec la formule :

$$\omega = \frac{\lambda}{\gamma} \quad n = \frac{\lambda}{\pi}\left\{ Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\frac{\omega+\sqrt{\omega^2+{\eta_1}^2}}{\omega+\sqrt{\omega^2+{\eta_2}^2}}\right) + \frac{\sqrt{\omega^2+{\eta_2}^2}-\sqrt{\omega^2+{\eta_1}^2}}{\omega}\right\}$$

C'est une formule approchée, mais elle est toujours très proche d'un entier, il suffit donc de prendre l'entier le plus proche correspondant pour déterminer la valeur de n. Cette valeur correspond également à celle du cas γ=0, car dans ce cas l'expression limite lorsque ω est très grand redonne bien : $n = \frac{\lambda}{\pi} Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)$.

Au couple d'équations transcendantales on peut lui substituer en bonne approximation en utilisant les comportements asymptotiques respectifs de toutes les fonctions de Bessel et comme vu précédemment une seule équation transcendantale (fonction de ω=λ/γ) faisant intervenir les fonctions de Airy Ai et Bi et la fameuse valeur n :

$$\zeta = \zeta(z) \quad tel\ que \quad \begin{cases} \zeta(z) = \left[\frac{3}{2}\left\{Log\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right) - \sqrt{1-z^2}\right\}\right]^{\frac{2}{3}} & z<1 \\ \zeta(z) = -\left[\frac{3}{2}\left\{\sqrt{z^2-1} - ArcSec(z)\right\}\right]^{\frac{2}{3}} & z>1 \end{cases}$$

$$\omega = \frac{\lambda}{\gamma} \quad et \quad \lambda = \frac{n\pi}{Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{\omega+\sqrt{\omega^2+{\nu_1}^2}}{\omega+\sqrt{\omega^2+{\nu_2}^2}}\right) + \frac{\sqrt{\omega^2+{\nu_2}^2}-\sqrt{\omega^2+{\nu_1}^2}}{\omega}} \Rightarrow \frac{Bi\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\eta_2}{\omega}\right)\right)}{Bi\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\eta_1}{\omega}\right)\right)} = \frac{Ai\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\eta_2}{\omega}\right)\right)}{Ai\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\eta_1}{\omega}\right)\right)}$$

L'équation transcendantale a exactement pour un n donné n solutions ω dont la plus grande est vraiment très importante et très distinctement isolée d'un groupe principal de n-1 solutions. La plus grande valeur de ω coïncide donc en réalité avec la solution γ=0 (γ=λ/ω≈0).

Les solutions sont construites comme l'addition d'une série à double indice et d'une série à simple indice comme suit :

$$\lambda,\gamma \to \lambda_{n,l},\gamma_{n,l} \quad M^1_{\lambda,\gamma}(\mu)\to M^1_{n,l}(\mu) \quad N^1_{\lambda,\gamma}(\mu)\to N^1_{n,l}(\mu) \quad M^2_{\lambda,\gamma}(\mu)\to M^2_{n,l}(\mu) \quad N^2_{\lambda,\gamma}(\mu)\to N^2_{n,l}(\mu)$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=1}^{n=+\infty}\sum_{l=1}^{l=n-1}A_{n,l}\left\{\frac{M^1_{n,l}(\mu)N^1_{n,l}(\nu)}{\left\|M^1_{n,l}(\mu)N^1_{n,l}(\nu)\right\|}+\frac{M^2_{n,l}(\mu)N^2_{n,l}(\nu)}{\left\|M^2_{n,l}(\mu)N^2_{n,l}(\nu)\right\|^2}\right\}\left(\frac{Sinh(\lambda_{n,l}(\varphi_0-\varphi))+Sinh(\lambda_{n,l}\varphi)}{Sinh(\lambda_{n,l}\varphi_0)}\right)\\ \displaystyle+\sum_{n=1}^{n=+\infty}A_{n,0}\frac{Sin\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\mu}{\eta_1}\right)\right)Sin\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\nu}{\eta_1}\right)\right)}{\frac{\lambda_{n,0}{}^2\left(\eta_2{}^2-\eta_1{}^2\right)}{4\left(1+\lambda_{n,0}{}^2\right)}Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)}\frac{Sinh(\lambda_{n,0}(\varphi_0-\varphi))+Sinh(\lambda_{n,0}\varphi)}{Sinh(\lambda_{n,0}\varphi_0)}\end{array}\right\}$$

$$Avec \quad A_{n,l}=\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}f(\mu,\nu)M^1_{\lambda,\gamma}(\mu)N^1_{\lambda,\gamma}(\nu)=\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}f(\mu,\nu)M^2_{\lambda,\gamma}(\mu)N^2_{\lambda,\gamma}(\nu)$$

$$A_{n,0}=\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}f(\mu,\nu)Sin\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\mu}{\eta_1}\right)\right)Sin\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\nu}{\eta_1}\right)\right).$$

Prenons comme fonction limite constante égale à 1, identique de part et d'autre du secteur d'angle, il vient :

$$A_{n,0}=\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}Sin\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\mu}{\eta_1}\right)\right)Sin\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\nu}{\eta_1}\right)\right)=$$

$$=2\eta_1{}^2\int_0^{Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)}dx\,e^{2x}Sin(\lambda_{n,0}x)\int_0^{Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)}dx\,Sin^2(\lambda_{n,0}x)=2\frac{\eta_1{}^2-\eta_2{}^2Cos\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)\right)}{4+\lambda_{n,0}{}^2}\left(1-Cos\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)\right)\right)$$

$$\Rightarrow A_{2n,0}=0 \quad A_{2n+1,0}=4\frac{\eta_1{}^2+\eta_2{}^2}{4+\lambda_{n,0}{}^2}$$

$$A_{n,l}=\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}M^1_{\lambda,\gamma}(\mu)N^1_{\lambda,\gamma}(\nu)=\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}M^2_{\lambda,\gamma}(\mu)N^2_{\lambda,\gamma}(\nu).$$

Pour développer les graphes de contour des profils de solutions et les représenter en coordonnées cartésiennes, outre les formules de correspondance entre coordonnées paraboliques cylindriques et cartésien, voici le domaine dans lequel sont compris sur une tranche azimutal φ=cste :

$$\text{Domaine} \quad \{x,y\} \in \left[0, c\eta_2^{\ 2}\right] \times \left[-\frac{c\eta_2^{\ 2}}{2}, \frac{c\eta_2^{\ 2}}{2}\right]$$

$$\text{Tel que } \{x,y\} \text{ inscrit entre les deux paraboles limites } \begin{cases} y + \dfrac{c\eta_2^{\ 2}}{2} - \dfrac{x^2}{2c\eta_2^{\ 2}} \geq 0 \\ y - \dfrac{c\eta_2^{\ 2}}{2} + \dfrac{x^2}{2c\eta_2^{\ 2}} \leq 0 \\ y + \dfrac{c\eta_1^{\ 2}}{2} - \dfrac{x^2}{2c\eta_1^{\ 2}} \leq 0 \\ y - \dfrac{c\eta_1^{\ 2}}{2} + \dfrac{x^2}{2c\eta_1^{\ 2}} \geq 0 \end{cases}.$$

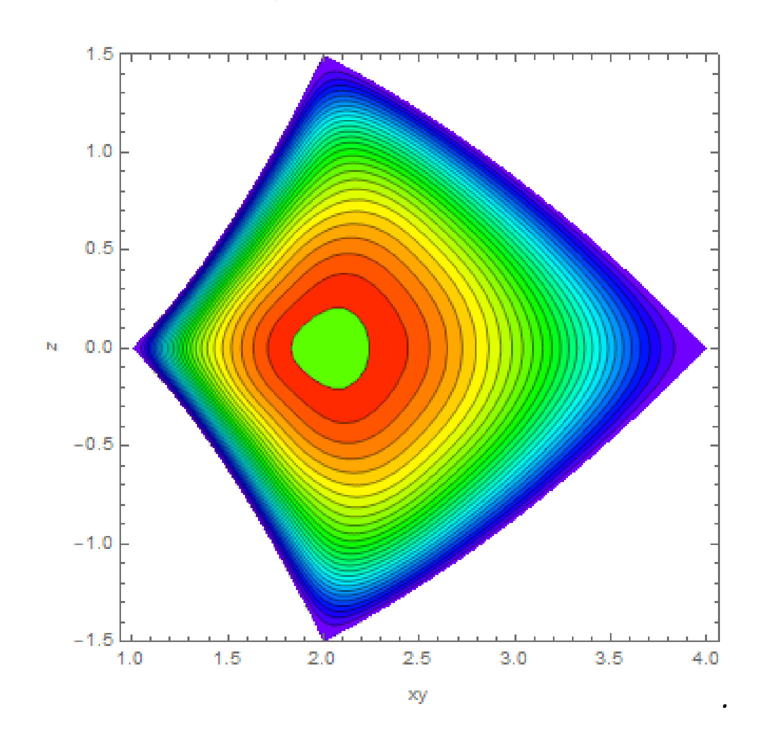
Et sur le plan équatorial du paraboloïde de révolution tronqué soit z=0 équivalent à μ =ν , il vient la correspondance avec les coordonnées cartésiennes :

$$\text{Domaine} \quad \{x,y\} \in \left[-c\eta_2^{\ 2}, c\eta_2^{\ 2}\right] \times \left[-c\eta_2^{\ 2}, c\eta_2^{\ 2}\right]$$

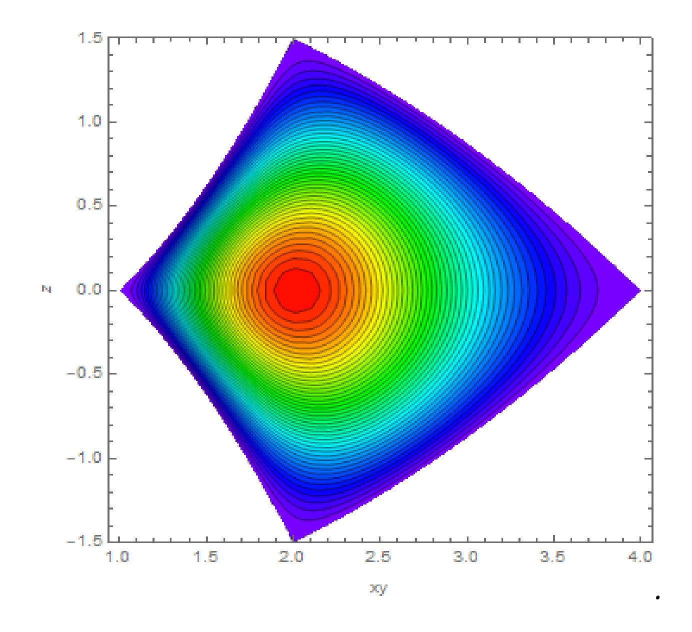
$$x = c\nu\mu Cos(\varphi) = c\mu^2 Cos(\varphi) \quad y = c\nu\mu Sin(\varphi) = c\mu^2 Sin(\varphi) \qquad Tan(\varphi) = \frac{y}{x}$$

$$\mu = \frac{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{c}} \quad \{x,y\} \text{ inscrit entre les deux cercles limites tel que } \quad \eta_1^{\ 4} \leq \frac{x^2+y^2}{c^2} \leq \eta_2^{\ 4}.$$

Secteur azimutale d'angle d'ouverture π/2, d'un paraboloïde de révolution tronqué symétriquement : vue en tranche sur l'angle π/20 :

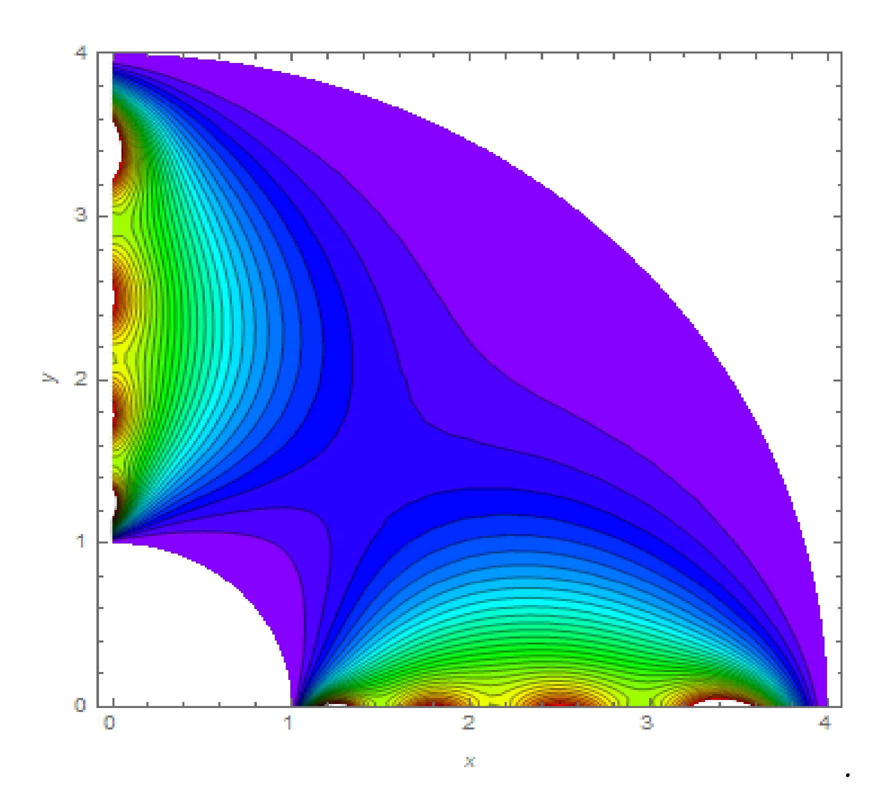


Secteur azimutale d'angle d'ouverture π/2, d'un paraboloïde de révolution tronqué symétriquement : vue en tranche sur l'angle de mi-ouverture π/4 :



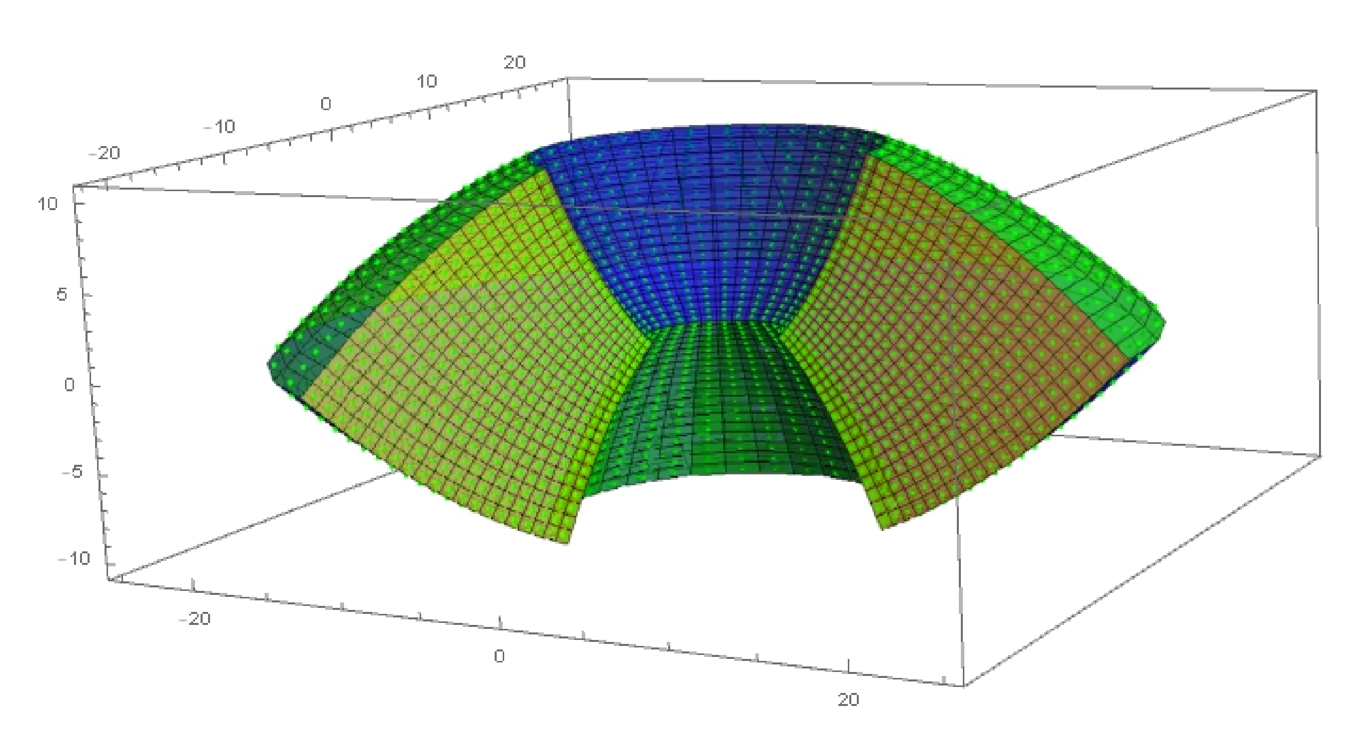
.

Secteur azimutale d'angle d'ouverture π/2, d'un paraboloïde de révolution tronqué symétriquement : vue en tranche sur le plan équatorial z=0, soit μ =ν :



.

Simulation numérique de la construction des solutions du problèmes aux limites inhomogène azimutal de Neumann sur un secteur angulaire azimutale de paraboloïde de révolution tronqué symétrique



Il s'agit du problème suivant géométriquement symétrique :

$$\mu_1 = \nu_1 = \eta_1 \quad \mu_2 = \nu_2 = \eta_2$$

$$\left.\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu}\right|_{\mu=\mu_1} = \left.\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \mu}\right|_{\mu=\mu_2} = \left.\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu}\right|_{\nu=\nu_1} = \left.\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial \nu}\right|_{\nu=\nu_2} = 0$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=0} = f_0(\mu,\nu) \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_0} = f_{\varphi_0}(\mu,\nu)$$

Les fonctions propres pour des valeurs de γ non nulles ainsi que les normes sont de la forme :

$$Pour \quad \gamma \neq 0$$

$$M^1_{\lambda,\gamma}(\mu) = \frac{\mathrm{Re}(I_{i\lambda}(\gamma\mu))}{\mathrm{Re}(I_{i\lambda}'(\gamma\eta_1))} - \frac{\mathrm{Re}(K_{i\lambda}(\gamma\mu))}{\mathrm{Re}(K_{i\lambda}'(\gamma\eta_1))} \quad N^1_{\lambda,\gamma}(\nu) = \frac{\mathrm{Re}(J_{i\lambda}(\gamma\nu))}{\mathrm{Re}(J_{i\lambda}'(\gamma\eta_1))} - \frac{\mathrm{Im}(J_{i\lambda}(\gamma\nu))}{\mathrm{Im}(J_{i\lambda}'(\gamma\eta_1))}$$

$$M^2_{\lambda,\gamma}(\mu) = \frac{\mathrm{Re}(J_{i\lambda}(\gamma\mu))}{\mathrm{Re}(J_{i\lambda}'(\gamma\eta_1))} - \frac{\mathrm{Im}(J_{i\lambda}(\gamma\mu))}{\mathrm{Im}(J_{i\lambda}'(\gamma\eta_1))} \quad N^2_{\lambda,\gamma}(\nu) = \frac{\mathrm{Re}(I_{i\lambda}(\gamma\nu))}{\mathrm{Re}(I_{i\lambda}'(\gamma\eta_1))} - \frac{\mathrm{Re}(K_{i\lambda}(\gamma\nu))}{\mathrm{Re}(K_{i\lambda}'(\gamma\eta_1))}$$

$$\left\|M^1_{\lambda,\gamma}(\mu)N^1_{\lambda,\gamma}(\nu)\right\|^2 = \left\|M^2_{\lambda,\gamma}(\mu)N^2_{\lambda,\gamma}(\nu)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \, \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu} \left(M^1_{\lambda,\gamma}(\mu)\right)^2 \left(N^1_{\lambda,\gamma}(\nu)\right)^2$$

$$= \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \, \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu} \left(M^2_{\lambda,\gamma}(\mu)\right)^2 \left(N^2_{\lambda,\gamma}(\nu)\right)^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \, \mu \left(M^1_{\lambda,\gamma}(\mu)\right)^2 \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \, \frac{\left(N^1_{\lambda,\gamma}(\nu)\right)^2}{\nu} + \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \, \frac{\left(M^1_{\lambda,\gamma}(\mu)\right)^2}{\mu} \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \, \nu \left(N^1_{\lambda,\gamma}(\nu)\right)^2$$

$$= \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \, \mu \left(M^2_{\lambda,\gamma}(\mu)\right)^2 \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \, \frac{\left(N^2_{\lambda,\gamma}(\nu)\right)^2}{\nu} + \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \, \frac{\left(M^2_{\lambda,\gamma}(\mu)\right)^2}{\mu} \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \, \nu \left(N^2_{\lambda,\gamma}(\nu)\right)^2$$

Il est important de noter que les deux types de fonctions propres partagent exactement les mêmes couples de valeurs propres (λ,γ). Ceci n'est vrai que dans le cas d'un problème géométriquement symétrique. Les intégrales des normes sont déterminées numériquement.

Lorsque les valeurs de γ sont nulles alors il s'agit de fonctions sinusoïdales logarithmiques avec leur norme respectives :

$$\lambda = \frac{n\pi}{Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)} \quad M_{\lambda,0}(\mu) = Cos\left(\lambda Log\left(\frac{\mu}{\eta_1}\right)\right) \quad N_{\lambda,0}(\nu) = Cos\left(\lambda Log\left(\frac{\nu}{\eta_1}\right)\right)$$

.

$$\|M_{\lambda,0}(\mu)N_{\lambda,0}(\nu)\|^2 = \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\mu \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\nu \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}(M_{\lambda,0}(\mu))^2(N_{\lambda,0}(\nu))^2 = \frac{2+\lambda^2}{4(1+\lambda^2)}\left(\eta_2{}^2-\eta_1{}^2\right)Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)$$

La fonction propre de couple de valeurs propres nulles s'écrit :

$$M_{0,0}(\mu) = N_{0,0}(\nu) \equiv 1$$

$$\|M_{0,0}(\mu)N_{0,0}(\nu)\|^2 = \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\mu \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\nu \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu} = 2\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{d\mu}{\mu}\int_{\eta_1}^{\eta_2} d\nu\, \nu = \left(\eta_2{}^2-\eta_1{}^2\right)Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)$$

Les valeurs propres forment des couples (λ,γ) dont nous venons de donner les valeurs lorsque γ est nulle, pour les autres valeurs de γ, il s'agit des solutions explicites du couple d'équations transcendantales suivantes :

$$\gamma,\lambda \quad tels\ que \quad \frac{\mathrm{Re}\{I_{i\lambda}'(\gamma\eta_2)\}}{\mathrm{Re}\{I_{i\lambda}'(\gamma\eta_1)\}} = \frac{\mathrm{Re}\{K_{i\lambda}'(\gamma\eta_2)\}}{\mathrm{Re}\{K_{i\lambda}'(\gamma\eta_1)\}} \quad et \quad \frac{\mathrm{Re}\{J_{i\lambda}'(\gamma\eta_2)\}}{\mathrm{Re}\{J_{i\lambda}'(\gamma\eta_1)\}} = \frac{\mathrm{Im}\{J_{i\lambda}'(\gamma\eta_2)\}}{\mathrm{Im}\{J_{i\lambda}'(\gamma\eta_1)\}}$$

Pour effectuer une indexation des solutions du couple d'équations transcendantales, une fois déterminée une solution (λ,γ), on calcule l'index principal n avec la formule :

$$\omega = \frac{\lambda}{\gamma} \quad n = \frac{\lambda}{\pi}\left\{Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\frac{\omega+\sqrt{\omega^2+\eta_1{}^2}}{\omega+\sqrt{\omega^2+\eta_2{}^2}}\right) + \frac{\sqrt{\omega^2+\eta_2{}^2}-\sqrt{\omega^2+\eta_1{}^2}}{\omega}\right\}$$

C'est une formule approchée, mais elle est toujours très proche d'un entier, il suffit donc de prendre l'entier le plus proche correspondant pour déterminer la valeur de n. Cette valeur correspond également à celle du cas γ=0, car dans ce cas l'expression limite lorsque ω est très grand redonne bien : $n = \frac{\lambda}{\pi}Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)$. *Au couple d'équations transcendantales il est possible de lui substituer en bonne approximation en utilisant les comportements asymptotiques respectifs de toutes les fonctions de Bessel et comme vu précédemment une seule équation transcendantale (fonction de ω=λ/γ) faisant intervenir les fonctions de Airy Ai et Bi et la fameuse valeur n :*

$$\zeta = \zeta(z) \quad tel\ que \quad \begin{cases} \zeta(z) = \left[\frac{3}{2}\left\{Log\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right) - \sqrt{1-z^2}\right\}\right]^{\frac{2}{3}} & z<1 \\ \zeta(z) = -\left[\frac{3}{2}\left\{\sqrt{z^2-1} - ArcSec(z)\right\}\right]^{\frac{2}{3}} & z>1 \end{cases}$$

$$\omega = \frac{\lambda}{\gamma} \quad et \quad \lambda = \frac{n\pi}{Log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{\omega+\sqrt{\omega^2+\nu_1{}^2}}{\omega+\sqrt{\omega^2+\nu_2{}^2}}\right) + \frac{\sqrt{\omega^2+\nu_2{}^2}-\sqrt{\omega^2+\nu_1{}^2}}{\omega}} \Rightarrow \frac{Bi'\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\eta_2}{\omega}\right)\right)}{Bi'\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\eta_1}{\omega}\right)\right)} = \frac{Ai'\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\eta_2}{\omega}\right)\right)}{Ai'\left(-\lambda^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{\eta_1}{\omega}\right)\right)}$$

L'équation transcendantale a exactement pour un n donné n+1 solutions ω dont la plus grande, la n+1 ième est vraiment très importante et très distinctement isolée d'un groupe principal de n solutions. La plus grande valeur de ω coïncide donc en réalité avec la solution γ=0 (γ=λ/ω≈0).

Les solutions sont construites comme l'addition d'une série à double indice et d'une série à simple indice et de la solution à valeurs propres (λ,γ) toutes deux nulles, comme suit :

$$\lambda,\gamma \to \lambda_{n,l},\gamma_{n,l} \quad M^1_{\lambda,\gamma}(\mu)\to M^1_{n,l}(\mu) \quad N^1_{\lambda,\gamma}(\mu)\to N^1_{n,l}(\mu) \quad M^2_{\lambda,\gamma}(\mu)\to M^2_{n,l}(\mu) \quad N^2_{\lambda,\gamma}(\mu)\to N^2_{n,l}(\mu)$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\left(\eta_2{}^2-\eta_1{}^2\right)Log\left(\dfrac{\eta_2}{\eta_1}\right)}\left\{A^0_{0,0}\dfrac{(\varphi_0-\varphi)}{\varphi_0}+A^{\varphi_0}_{0,0}\dfrac{\varphi}{\varphi_0}\right\}+ \\ +\displaystyle\sum_{n=1}^{n=+\infty}\left\{A^0_{n,0}\dfrac{Sinh(\lambda_{n,0}(\varphi_0-\varphi))}{Sinh(\lambda_{n,0}\varphi_0)}+A^{\varphi_0}_{n,0}\dfrac{Sinh(\lambda_{n,0}\varphi)}{Sinh(\lambda_{n,0}\varphi_0)}\right\}\dfrac{Cos\left(\lambda_{n,0}Log\left(\dfrac{\mu}{\eta_1}\right)\right)Cos\left(\lambda_{n,0}Log\left(\dfrac{\nu}{\eta_1}\right)\right)}{\dfrac{2+\lambda_{n,0}{}^2}{4\left(1+\lambda_{n,0}{}^2\right)}\left(\eta_2{}^2-\eta_1{}^2\right)Log\left(\dfrac{\eta_2}{\eta_1}\right)}+ \\ +\displaystyle\sum_{n=1}^{n=+\infty}\sum_{l=1}^{l=n-1}\left\{A^0_{n,l}\dfrac{Sinh(\lambda_{n,l}(\varphi_0-\varphi))}{Sinh(\lambda_{n,l}\varphi_0)}+A^{\varphi_0}_{n,l}\dfrac{Sinh(\lambda_{n,l}\varphi)}{Sinh(\lambda_{n,l}\varphi_0)}\right\}\dfrac{M^1_{n,l}(\mu)N^1_{n,l}(\nu)+M^2_{n,l}(\mu)N^2_{n,l}(\nu)}{\left\|M^1_{n,l}(\mu)N^1_{n,l}(\nu)\right\|^2} \end{array}\right\}$$

$$Avec\quad\left\{\begin{array}{l} \lambda_{n,0}=\dfrac{n\pi}{Log\left(\dfrac{\eta_2}{\eta_1}\right)} \qquad A^0_{0,0}=\displaystyle\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\dfrac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}f_0(\mu,\nu) \qquad A^{\varphi_0}_{0,0}=\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\dfrac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}f_{\varphi_0}(\mu,\nu) \\ A^0_{n,0}=\displaystyle\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\dfrac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}f_0(\mu,\nu)Cos\left(\lambda_{n,0}Log\left(\dfrac{\mu}{\eta_1}\right)\right)Cos\left(\lambda_{n,0}Log\left(\dfrac{\nu}{\eta_1}\right)\right) \\ A^{\varphi_0}_{n,0}=\displaystyle\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\dfrac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}f_{\varphi_0}(\mu,\nu)Cos\left(\lambda_{n,0}Log\left(\dfrac{\mu}{\eta_1}\right)\right)Cos\left(\lambda_{n,0}Log\left(\dfrac{\nu}{\eta_1}\right)\right) \\ A^0_{n,l}=\displaystyle\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\dfrac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}f_0(\mu,\nu)M^1_{n,l}(\mu)N^1_{n,l}(\nu)=\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\dfrac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}f_0(\mu,\nu)M^2_{n,l}(\mu)N^2_{n,l}(\nu) \\ A^{\varphi_0}_{n,l}=\displaystyle\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\dfrac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}f_{\varphi_0}(\mu,\nu)M^1_{n,l}(\mu)N^1_{n,l}(\nu)=\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\dfrac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}f_{\varphi_0}(\mu,\nu)M^2_{n,l}(\mu)N^2_{n,l}(\nu) \end{array}\right.$$

Prenons comme fonctions limites des constantes égales à T0 et Tφ0 de part et d'autre du secteur d'angle. Dans ce cas tous les coefficients sont nuls, car toutes les fonctions propres sont orthogonales à la fonction propre unité. Dans ce cas la solution devient triviale, linéaire en angle azimutale comme prévu par la théorie :

$$f_0(\mu,\nu)=T_0 \quad f_{\varphi_0}(\mu,\nu)=T_{\varphi_0} \quad A_{0,0}^{0}=T_0\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}=\frac{T_0}{\left(\eta_2{}^2-\eta_1{}^2\right)Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)}$$

$$A_{0,0}^{\varphi_0}=T_{\varphi_0}\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\mu\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}=\frac{T_{\varphi_0}}{\left(\eta_2{}^2-\eta_1{}^2\right)Log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)}\Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi)=T_0\,\frac{(\varphi_0-\varphi)}{\varphi_0}+T_{\varphi_0}\,\frac{\varphi}{\varphi_0}$$

.

Ce cas n'est donc pas très intéressant. Prenons maintenant deux fonctions paliers sur la tranche azimutale comme suit , cela donne les coefficients suivants :

$$\eta_{10}=\frac{4\eta_1+\eta_2}{5} \quad \eta_{20}=\frac{\eta_1+4\eta_2}{5} \quad \eta_{1\varphi 0}=\frac{2\eta_1+\eta_2}{3} \quad \eta_{2\varphi 0}=\frac{\eta_1+2\eta_2}{3}$$

$$\begin{cases}f_0(\mu,\nu)=1 & (\mu,\nu)\in[\eta_{10},\eta_{20}]\times[\eta_{10},\eta_{20}]\\ f_0(\mu,\nu)=0 & (\mu,\nu)\notin[\eta_{10},\eta_{20}]\times[\eta_{10},\eta_{20}]\end{cases} \quad \begin{cases}f_{\varphi_0}(\mu,\nu)=1 & (\mu,\nu)\in[\eta_{1\varphi 0},\eta_{2\varphi 0}]\times[\eta_{1\varphi 0},\eta_{2\varphi 0}]\\ f_{\varphi_0}(\mu,\nu)=0 & (\mu,\nu)\notin[\eta_{1\varphi 0},\eta_{2\varphi 0}]\times[\eta_{1\varphi 0},\eta_{2\varphi 0}]\end{cases}$$

$$A_{0,0}^{0}=\int_{\eta_{10}}^{\eta_{20}}d\mu\int_{\eta_{10}}^{\eta_{20}}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}=\left(\eta_{20}{}^2-\eta_{10}{}^2\right)Log\left(\frac{\eta_{20}}{\eta_{10}}\right) \qquad A_{0,0}^{\varphi_0}=\int_{\eta_{1\varphi 0}}^{\eta_{2\varphi 0}}d\mu\int_{\eta_{1\varphi 0}}^{\eta_{2\varphi 0}}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}=\left(\eta_{2\varphi 0}{}^2-\eta_{1\varphi 0}{}^2\right)Log\left(\frac{\eta_{2\varphi 0}}{\eta_{1\varphi 0}}\right)$$

$$A_{n,0}^{0}=\int_{\eta_{10}}^{\eta_{20}}d\mu\int_{\eta_{10}}^{\eta_{20}}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}Cos\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\mu}{\eta_1}\right)\right)Cos\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\nu}{\eta_1}\right)\right)=$$

$$=\frac{2\left\{Sin\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\eta_{10}}{\eta_1}\right)\right)-Sin\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\eta_{20}}{\eta_1}\right)\right)\right\}}{\lambda_{n,0}\left(4+\lambda_{n,0}{}^2\right)}\left\{\begin{aligned}&2\eta_{10}{}^2Cos\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\eta_{10}}{\eta_1}\right)\right)-2\eta_{20}{}^2Cos\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\eta_{20}}{\eta_1}\right)\right)+\\&+\eta_{10}{}^2\lambda_{n,0}Sin\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\eta_{10}}{\eta_1}\right)\right)-\eta_{20}{}^2\lambda_{n,0}Sin\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\eta_{20}}{\eta_1}\right)\right)\end{aligned}\right\}$$

$$A_{n,0}^{\varphi_0}=\int_{\eta_{1\varphi 0}}^{\eta_{2\varphi 0}}d\mu\int_{\eta_{1\varphi 0}}^{\eta_{2\varphi 0}}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}Cos\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\mu}{\eta_1}\right)\right)Cos\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\nu}{\eta_1}\right)\right)=$$

$$=\frac{2\left\{Sin\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\eta_{1\varphi 0}}{\eta_1}\right)\right)-Sin\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\eta_{2\varphi 0}}{\eta_1}\right)\right)\right\}}{\lambda_{n,0}\left(4+\lambda_{n,0}{}^2\right)}\left\{\begin{aligned}&2\eta_{1\varphi 0}{}^2Cos\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\eta_{1\varphi 0}}{\eta_1}\right)\right)-2\eta_{2\varphi 0}{}^2Cos\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\eta_{2\varphi 0}}{\eta_1}\right)\right)+\\&+\eta_{1\varphi 0}{}^2\lambda_{n,0}Sin\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\eta_{1\varphi 0}}{\eta_1}\right)\right)-\eta_{2\varphi 0}{}^2\lambda_{n,0}Sin\left(\lambda_{n,0}Log\left(\frac{\eta_{2\varphi 0}}{\eta_1}\right)\right)\end{aligned}\right\}$$

$$A_{n,l}^{0}=\int_{\eta_{10}}^{\eta_{20}}d\mu\int_{\eta_{10}}^{\eta_{20}}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}M_{n,l}^{1}(\mu)N_{n,l}^{1}(\nu)=\int_{\eta_{10}}^{\eta_{20}}d\mu\int_{\eta_{10}}^{\eta_{20}}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}M_{n,l}^{2}(\mu)N_{n,l}^{2}(\nu)$$

$$A_{n,l}^{\varphi_0}=\int_{\eta_{1\varphi 0}}^{\eta_{2\varphi 0}}d\mu\int_{\eta_{1\varphi 0}}^{\eta_{2\varphi 0}}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}M_{n,l}^{1}(\mu)N_{n,l}^{1}(\nu)=\int_{\eta_{1\varphi 0}}^{\eta_{2\varphi 0}}d\mu\int_{\eta_{1\varphi 0}}^{\eta_{2\varphi 0}}d\nu\,\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}M_{n,l}^{2}(\mu)N_{n,l}^{2}(\nu)$$

.

Pour développer les graphes de contour des profils de solutions et les représenter en coordonnées cartésiennes, outre les formules de correspondance entre coordonnées paraboliques cylindriques et cartésien, voici le domaine dans lequel sont compris sur une tranche azimutal φ=cste :

$$Domaine \quad \{x,y\} \in \left[0, c\eta_2{}^2\right] \times \left[-\frac{c\eta_2{}^2}{2}, \frac{c\eta_2{}^2}{2}\right]$$

$$Tel\ que\ \{x,y\}\ inscrit\ entre\ les\ deux\ paraboles\ limites \begin{cases} y + \dfrac{c\eta_2{}^2}{2} - \dfrac{x^2}{2c\eta_2{}^2} \geq 0 \\ y - \dfrac{c\eta_2{}^2}{2} + \dfrac{x^2}{2c\eta_2{}^2} \leq 0 \\ y + \dfrac{c\eta_1{}^2}{2} - \dfrac{x^2}{2c\eta_1{}^2} \leq 0 \\ y - \dfrac{c\eta_1{}^2}{2} + \dfrac{x^2}{2c\eta_1{}^2} \geq 0 \end{cases}$$

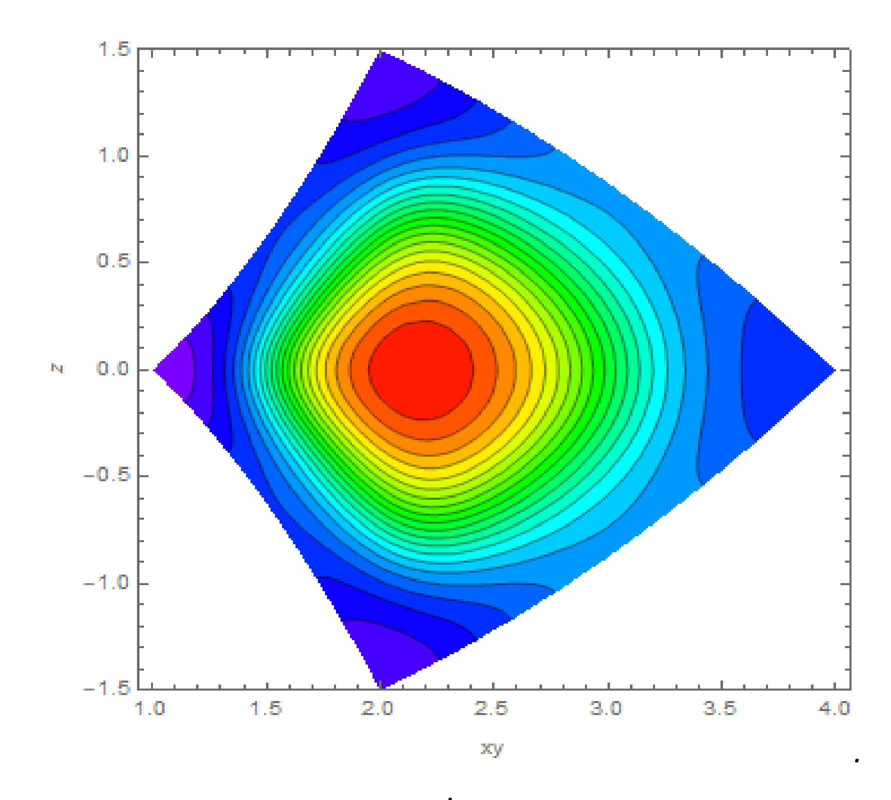
Et sur le plan équatorial du paraboloïde de révolution tronqué soit z=0 équivalent à μ =ν , il vient la correspondance avec les coordonnées cartésiennes :

$$Domaine \quad \{x,y\} \in \left[-c\eta_2{}^2, c\eta_2{}^2\right] \times \left[-c\eta_2{}^2, c\eta_2{}^2\right]$$

$$x = c\nu\mu Cos(\varphi) = c\mu^2 Cos(\varphi) \quad y = c\nu\mu Sin(\varphi) = c\mu^2 Sin(\varphi) \qquad Tan(\varphi) = \frac{y}{x}$$

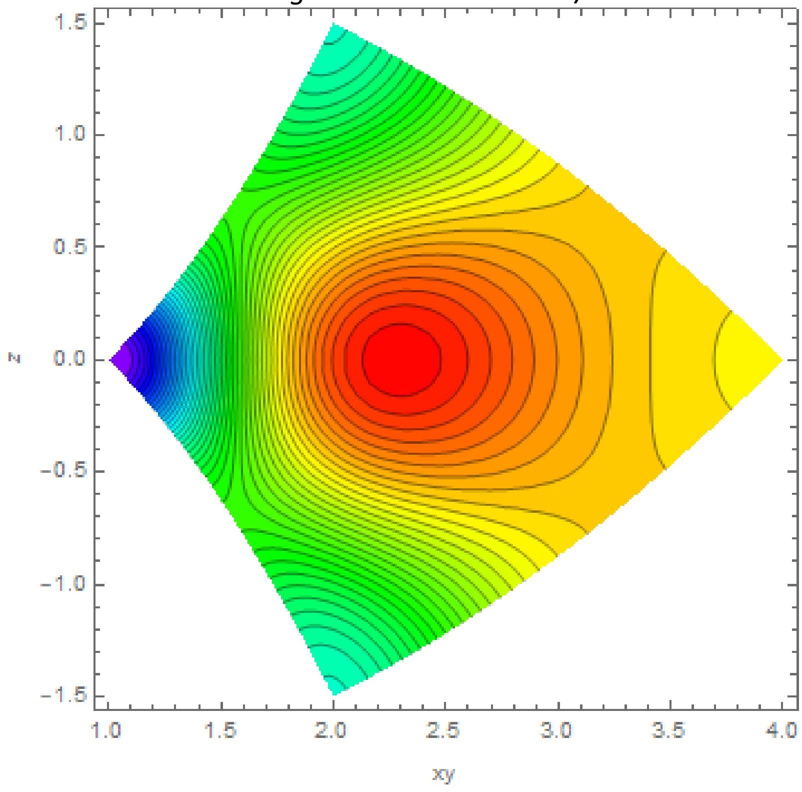
$$\mu = \frac{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{c}} \quad \{x,y\}\ inscrit\ entre\ les\ deux\ cercles\ limites\ tel\ que \quad \eta_1{}^4 \leq \frac{x^2+y^2}{c^2} \leq \eta_2{}^4$$

Secteur azimutale d'angle d'ouverture π/2, d'un paraboloïde de révolution tronqué symétriquement : vue en tranche sur l'angle π/20 :



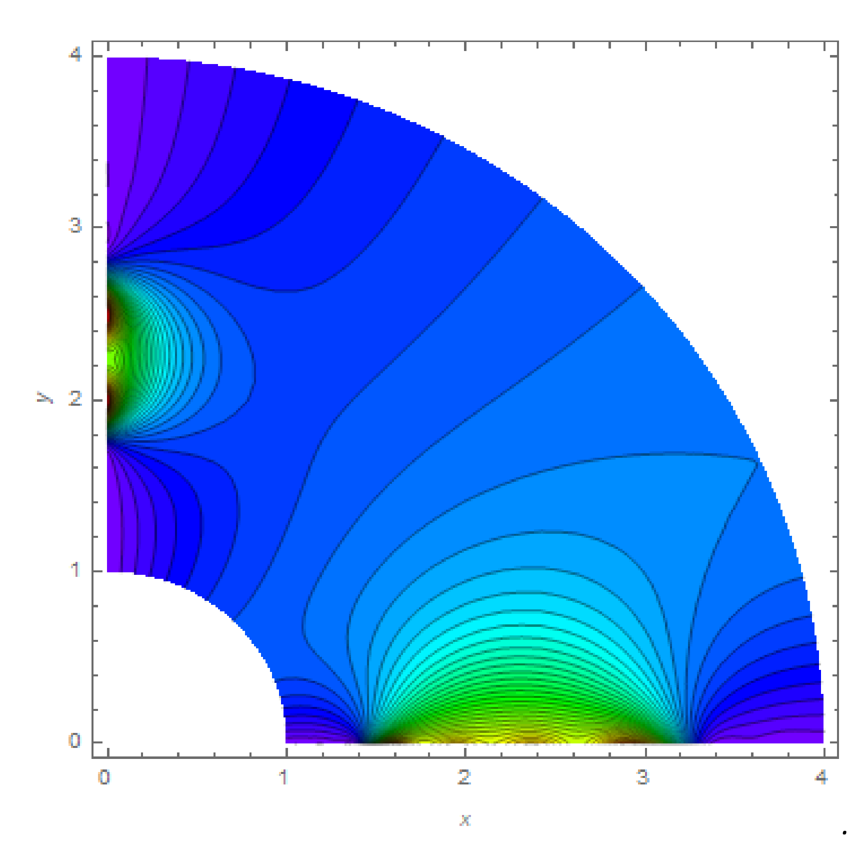
Secteur azimutale d'angle d'ouverture π/2, d'un paraboloïde de révolution tronqué

symétriquement : vue en tranche sur l'angle de mi-ouverture π/4 :



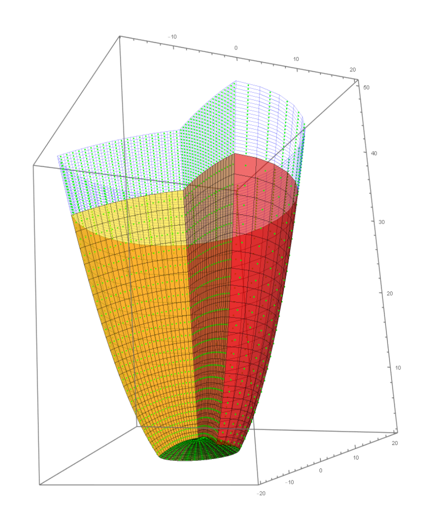
.

Secteur azimutale d'angle d'ouverture π/2, d'un paraboloïde de révolution tronqué symétriquement : vue en tranche sur le plan équatorial z=0, soit μ =ν :



.

Secteur de paraboloïde plein de révolution tronqué et infini condition inhomogène de Dirichlet en μ, homogène de Dirichlet en ν et φ



Le problème intérieur aux limites le plus général de l'équation de Laplace se présente comme suit :

$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}\right)+\frac{1}{\mu^2\nu^2}\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

$$(\mu,\nu,\varphi)\in\Omega=[\mu_0,+\infty]\times[0,\nu_0]\times[0,\varphi_0] \quad T(\mu,\nu,\varphi)\ fini$$

$$C.L.\quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\mu=\mu_0}=f(\nu,\varphi) \qquad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_0}=0 \qquad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=0}=T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_0}=0$$

Les fonctions azimutales sur un secteur d'angle ϕ0 sont de la forme

$$\Phi_{n_\varphi}(\varphi)=Sin\left(\tau_{n_\varphi}\varphi\right) \qquad \tau_{n_\varphi}=\frac{n_\varphi\pi}{\varphi_0} \qquad \left\|\Phi_{n_\varphi}(\varphi)\right\|^2=\frac{\varphi_0}{2}$$

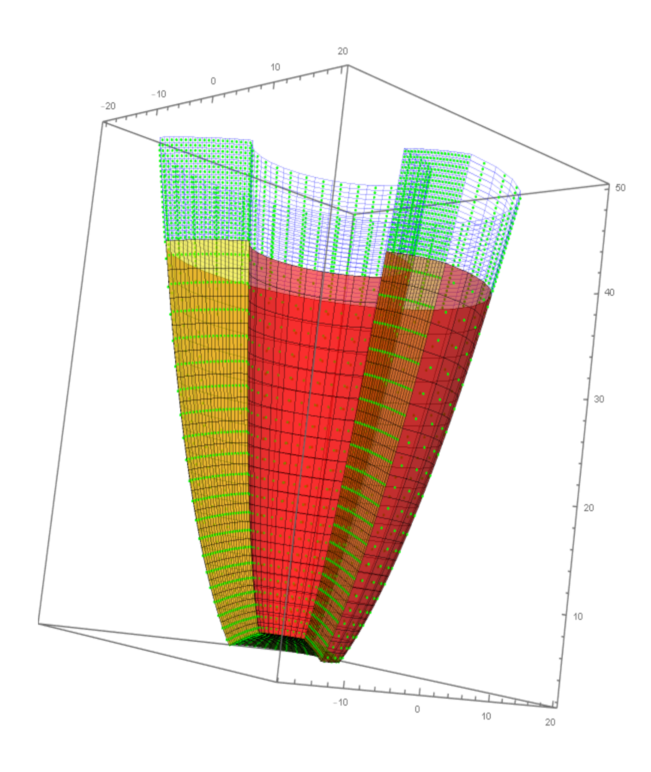
Les fonctions propres en ν, intégrales et solutions sont les suivantes :

$$\tau_{n_\varphi}=\frac{n_\varphi\pi}{\varphi_0} \qquad N^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}(\nu)=J_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu\right) \quad \lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu} \quad tq \quad J_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu_0\right)=0 \quad \left\|N^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}(\nu)\right\|^2=\frac{\nu_0^{\,2}\left(J_{\tau_{n_\varphi}}{}'\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu_0\right)\right)^2}{2}$$

$$M^{\mu_0}_{n_\varphi,n_\nu}(\mu)=K_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\mu\right) \qquad A^{\mu_0}_{n_\varphi,n_\nu}=\int_0^{\nu_0}d\nu\,\nu J_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu\right)\int_0^{\varphi_0}d\varphi\ f(\nu,\varphi)Sin\left(\tau_{n_\varphi}\varphi\right)$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{n_\varphi=1}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty}A^{\mu_0}_{n_\varphi,n_\nu}\ \frac{K_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\mu\right)}{K_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\mu_0\right)}\frac{J_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu\right)}{\left\|N^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}(\nu)\right\|^2}Sin\left(\tau_{n_\varphi}\varphi\right)$$

Secteur de paraboloïde creux de révolution tronqué et infini condition inhomogène de Dirichlet en μ, homogène de Dirichlet en ν et φ



Le problème intérieur aux limites le plus général de l'équation de Laplace se présente comme suit :

$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}\right)+\frac{1}{\mu^2\nu^2}\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

$$(\mu,\nu,\varphi)\in\Omega=[\mu_0,+\infty]\times[\nu_1,\nu_2]\times[0,\varphi_0]\quad T(\mu,\nu,\varphi)\ fini$$

$$C.L.\quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\mu=\mu_0}=f(\nu,\varphi)\qquad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_1}=T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_2}=0\qquad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=0}=T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_0}=0$$

Les fonctions azimutales sur un secteur d'angle ϕ0 sont de la forme

$$\Phi_{n_\varphi}(\varphi)=Sin\left(\tau_{n_\varphi}\varphi\right)\qquad \tau_{n_\varphi}=\frac{n_\varphi\pi}{\varphi_0}\qquad \left\|\Phi_{n_\varphi}(\varphi)\right\|^2=\frac{\varphi_0}{2}$$

D'après tous les calculs déjà réalisés, les fonctions propres en ν, intégrales et solutions sont les suivantes :

$$\tau_{n_\varphi}=\frac{n_\varphi\pi}{\varphi_0}\qquad N^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}(\nu)=\frac{J_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu\right)}{J_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu_1\right)}-\frac{Y_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu\right)}{Y_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu_1\right)}\qquad \lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\quad tq\quad \frac{J_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu_2\right)}{J_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu_1\right)}=\frac{Y_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu_2\right)}{Y_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu_1\right)}$$

$$\frac{N^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}{}'(\nu_1)}{\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}}=D^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}(\nu_1)=\frac{J_{\tau_{n_\varphi}}{}'\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu_1\right)}{J_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu_1\right)}-\frac{Y_{\tau_{n_\varphi}}{}'\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu_1\right)}{Y_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu_1\right)}\qquad \frac{N^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}{}'(\nu_2)}{\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}}=D^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}(\nu_2)=\frac{J_{\tau_{n_\varphi}}{}'\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu_2\right)}{J_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu_1\right)}-\frac{Y_{\tau_{n_\varphi}}{}'\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu_2\right)}{Y_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\nu_1\right)}$$

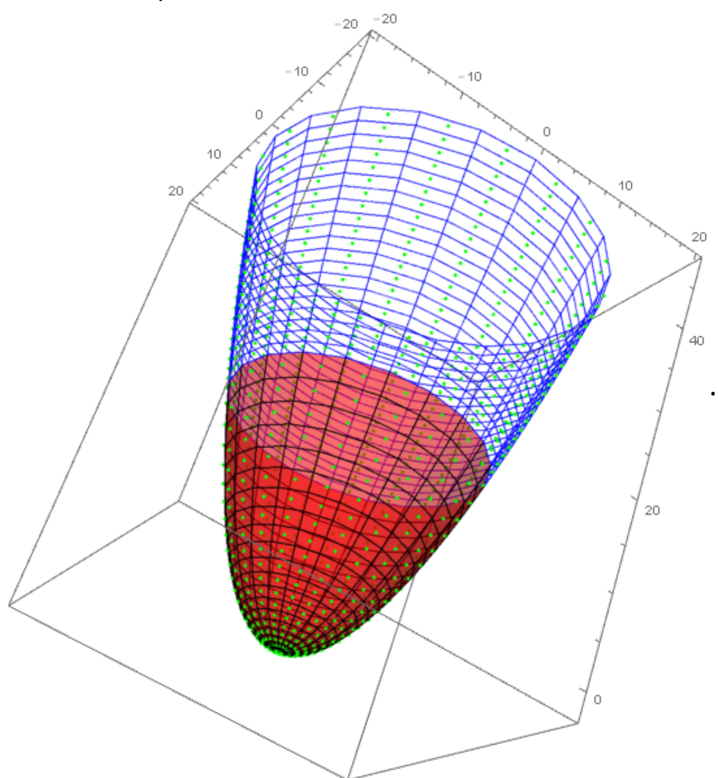
$$\left\|N^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}(\nu)\right\|^2=\frac{\nu_2{}^2\left(D^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}(\nu_2)\right)^2-\nu_1{}^2\left(D^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}(\nu_1)\right)^2}{2}\qquad M^{\mu_0}_{n_\varphi,n_\nu}(\mu)=K_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\mu\right)$$

$$A^{\mu_0}_{n_\varphi,n_\nu}=\int_0^{\nu_0}d\nu\,\nu\,N^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}(\nu)\int_0^{\varphi_0}d\varphi\ f(\nu,\varphi)Sin\left(\tau_{n_\varphi}\varphi\right)$$

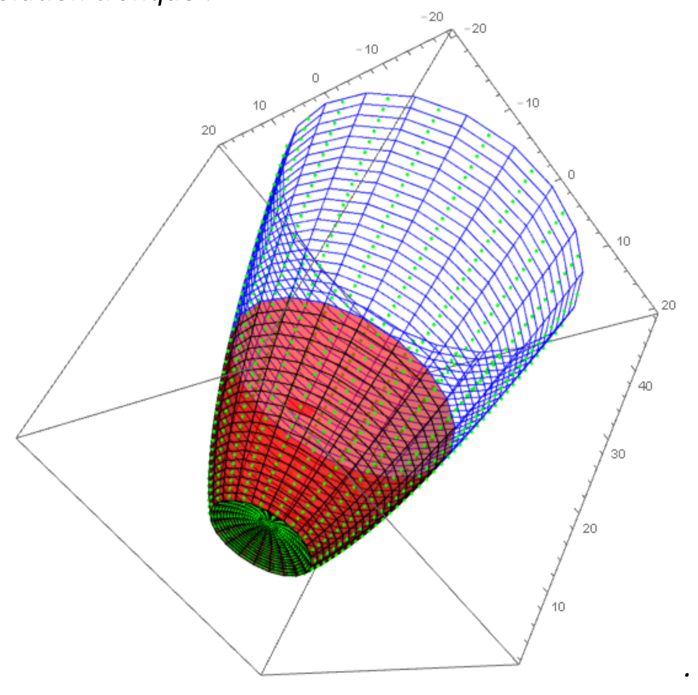
$$T(\mu,\nu,\varphi)=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{n_\varphi=1}^{+\infty}\sum_{n_\nu=1}^{+\infty}A^{\mu_0}_{n_\varphi,n_\nu}\ \frac{K_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\mu\right)}{K_{\tau_{n_\varphi}}\left(\lambda^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}\mu_0\right)}\frac{N^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}(\nu)}{\left\|N^{\nu}_{n_\varphi,n_\nu}(\nu)\right\|^2}Sin\left(\tau_{n_\varphi}\varphi\right)$$

Domaine non bornée ayant comme frontière un paraboloïde de révolution ou un paraboloïde de révolution tronqué soumis à des conditions aux limites inhomogènes dépendantes ou indépendantes de l'angle azimutal

Un paraboloïde de révolution complet :



Un paraboloïde de révolution tronqué :



Il s'agit maintenant d'aborder en quelques pages la construction de solution à un problème aux limites sur un domaine bordée par une surface en forme de paraboloïde de révolution. Les conditions sont inhomogènes sur la surface de type Dirichlet ou Neumann. Pour la partie tronquée s'il y a lieu les conditions sont également de type Dirichlet/Neumann homogène ou inhomogène. On commence l'exposé par des conditions aux limites de Dirichlet et sans dépendance azimutal, puis on aborde des exemples avec conditions de Neumann. Sans dépendance azimutale, le problème est restreint à deux dimensions.

Commençons par un paraboloïde complet, pour l'intérieur du domaine, il vient :

$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}\right)=0$$

$$(\mu,\nu)\in\Omega=[0,+\infty]\times[0,\nu_0] \quad T(\mu,\nu)\ fini \quad C.L. \quad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu).$$

Tandis que pour l'extérieur du domaine sur le même paraboloïde de révolution complet nous avons :

$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}\right)=0$$

$$(\mu,\nu)\in\Omega=[0,+\infty]\times[\nu_0,+\infty] \quad T(\mu,\nu)\ fini \quad C.L. \quad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu).$$

Du fait de la non dépendance azimutal les solutions se développent sous la forme de fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0 en μ. Aucune condition homogène n'est imposé en μ, de ce fait le spectre de valeur propres du problème aux limites devient continu, et la solution ne peut se développer en série. Par contre la contrainte de finitude de la solution en μ=0, impose le choix de la fonction de Bessel de première espèce.

Alors on peut choisir de construire la solution sous une forme intégrale. Soit proposer une solution de la forme :

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty} d\lambda\, J_0(\lambda\mu)\big(C(\lambda)\, I_0(\lambda\nu)+D(\lambda)K_0(\lambda\nu)\big).$$

Les coefficients C et D sont alors devenus des fonctions du paramètre d'intégration que l'on peut considérer variant dans spectre continu de valeur propre λ. Le choix des fonctions de Bessel modifiées de première ou deuxième espèce pour la dépendance en v sera alors guidé par la condition de finitude de la fonction à l'infini. Pour un problème intérieur au paraboloïde de révolution (ou convexe) ce sera la fonction de Bessel modifiée de première espèce I, et pour le problème extérieur (ou concave) la fonction de Bessel modifiée K.

Continuons par un paraboloïde de révolution tronqué, pour l'intérieur du domaine, il vient le problème aux limites suivants qui se décompose en deux sous-problème:

$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}\right)=0$$

$$(\mu,\nu)\in\Omega=[\mu_0,+\infty]\times[0,\nu_0]\quad T(\mu,\nu)\ fini$$

$$C.L.\quad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu)\quad \left.\frac{\alpha}{\sqrt{\mu_0^{\ 2}+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\beta\,T(\mu,\nu)\right|_{\mu=\mu_0}=g(\nu)$$

$$T(\mu,\nu)=T_{\mu_0}(\mu,\nu)+T_{\nu_0}(\mu,\nu)\Leftrightarrow\begin{cases}T_{\mu_0}(\mu,\nu)\quad C.L.\quad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu)\quad \left.\dfrac{\alpha}{\sqrt{\mu_0^{\ 2}+\nu^2}}\dfrac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\beta\,T(\mu,\nu)\right|_{\mu=\mu_0}=0\\ T_{\nu_0}(\mu,\nu)\quad C.L.\quad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=0\quad \left.\dfrac{\alpha}{\sqrt{\mu_0^{\ 2}+\nu^2}}\dfrac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\beta\,T(\mu,\nu)\right|_{\mu=\mu_0}=g(\nu)\end{cases}$$

Le premier sous-problème est homogène en μ, le second en ν. Tandis que pour l'extérieur du domaine sur le même paraboloïde de révolution tronqué nous avons :

$$\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu)}{\partial\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}\right)=0$$

$$(\mu,\nu)\in\Omega=[\mu_0,+\infty]\times[\nu_0,+\infty]\quad T(\mu,\nu)\ fini$$

$$C.L.\quad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu)\quad \left.\frac{\alpha}{\sqrt{\mu_0^{\ 2}+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\beta\,T(\mu,\nu)\right|_{\mu=\mu_0}=g(\nu)$$

$$T(\mu,\nu)=T_{\mu_0}(\mu,\nu)+T_{\nu_0}(\mu,\nu)\Leftrightarrow\begin{cases}T_{\mu_0}(\mu,\nu)\quad C.L.\quad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu)\quad \left.\dfrac{\alpha}{\sqrt{\mu_0^{\ 2}+\nu^2}}\dfrac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\beta\,T(\mu,\nu)\right|_{\mu=\mu_0}=0\\ T_{\nu_0}(\mu,\nu)\quad C.L.\quad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=0\quad \left.\dfrac{\alpha}{\sqrt{\mu_0^{\ 2}+\nu^2}}\dfrac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\beta\,T(\mu,\nu)\right|_{\mu=\mu_0}=g(\nu)\end{cases}$$

.

Le tableau synoptique qui suit montre le type de construction possible par série ou transformation intégrale dans le cas du paraboloïde de révolution tronqué :

Type de problème : intérieur, extérieur	*Conditions aux limites en μ= μ0*	*Conditions aux limites en ν= ν0*	*Construction de la solution*
Intérieur	Homogène	Inhomogène	Transformation intégrale
Extérieur	Homogène	Inhomogène	Transformation intégrale
Intérieur	Inhomogène	Homogène	Représentation en série discrète
Extérieur	Inhomogène	Homogène	Transformation intégrale

Pour construire certaines des solutions évoquées juste avant, on utilise une transformation de Hankel qui garantie le développement de toute fonction ayant les propriétés adéquates en un couple de formes intégrales dénommées couramment intégrales de Fourier-Bessel.

La plupart des exemples donnés ci-dessous sont tirés de l'ouvrage d'exercices de Physique Mathématique publié par N.N.Lebedev, I.P.Skalskaya et Y.S.Ufliand, 1965, « Problems of Mathematical Physics », section 2 « The Hankel transform » pages 160 et suivantes, section 5 « Paraboloïdal coordinates » page 231 et suivantes. Les énoncés ont été parfois modifiés pour ne faire apparaître que la formalisation mathématique du problème aux limites de Laplace, sans se préoccuper de la forme exacte des grandeurs physiques en jeu.

<u>Théorème de Hankel avec les fonctions de Bessel de première espèce</u>

Pour toute fonction f(x) sur l'intervalle [0,+∞) dont la variation est bornée sur tout intervalle [0,x0], et telle que l'intégrale est finie : $\int_0^{+\infty} dx \left| f(x) \right| \sqrt{x} < \infty$

Cette dernière admet la représentation intégrale suivante, dès lors que le paramètre v > -1/2, aux points de continuité de la fonction : $f(x) = \int_0^{+\infty} d\lambda\ \lambda J_\nu(\lambda x) \int_0^{+\infty} dt\ t J_\nu(\lambda t) f(t)$

Au point de discontinuité de la fonction, on écrit :

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \int_0^{+\infty} d\lambda\ \lambda J_\nu(\lambda x) \int_0^{+\infty} dt\ t J_\nu(\lambda t) f(t)$$

Cette formule intégrale peut se décomposer afin d'introduire la transformée de Hankel de la fonction f(x) :

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} dt\ t J_\nu(\lambda t) f(t) \quad \textit{transformée de Hankel}$$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} d\lambda\ \lambda J_\nu(\lambda x) F(\lambda) \quad \textit{transformée inverse de Hankel}$$

<u>Transformation de Hankel avec les fonctions de Bessel de deuxième espèce</u>

Un développement intégrale existe utilisant les fonctions de Bessel de deuxième espèce et les fonctions de Struve pour l'inversion, avec les mêmes conditions imposées aux fonctions f(x) :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} d\lambda\ \sqrt{\lambda x} \mathbf{H}_\nu(\lambda x) \int_0^{+\infty} dt\ \sqrt{\lambda t} Y_\nu(\lambda t) f(t) .$$

$Y_\nu(\lambda t)$ *fonction de Bessel de deuxième espèce*

$\mathbf{H}_\nu(\lambda x)$ *fonction de Struve*

Transformation sur l'intervalle [x_0,+∞) appelée transformation de Weber/Dirichlet : condition homogène de Dirichlet sur le rayon intérieur

Un développement intégral existe également sur l'intervalle [x_0,+∞) utilisant les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce, avec les mêmes conditions imposées aux fonctions f(x), pour des fonctions f(x) s'annulant en x=x_0 :

$$f(x)=\int_0^{+\infty} d\lambda \ \frac{\lambda\,\Psi_\nu(\lambda x)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}\int_{x_0}^{+\infty} dt\ t\,\Psi_\nu(\lambda t) f(t) \qquad f(x_0)=0$$

$$\Psi_\nu(\lambda x)=J_\nu(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)$$

$J_\nu(\lambda x)$ *fonction de Bessel de première espèce*

$Y_\nu(\lambda x)$ *fonction de Bessel de deuxième espèce*

$$\Leftrightarrow\begin{cases} F(\lambda)=\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} dt\ t\,\Psi_\nu(\lambda t) f(t) \\ f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} d\lambda\ \frac{\lambda\,\Psi_\nu(\lambda x)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2} F(\lambda)\end{cases}$$

Transformation sur l'intervalle [x_0,+∞) appelée transformation de Weber/Neumann : condition homogène de Neumann sur le rayon intérieur

Un développement intégral existe également sur l'intervalle [x_0,+∞) utilisant les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce, avec les mêmes conditions imposées aux fonctions f(x), pour des fonctions f(x) dont la dérivée première s'annule en x=x_0 :

$$f(x)=\int_0^{+\infty} d\lambda \ \frac{\lambda\,\Psi_\nu(\lambda x)}{(J_\nu'(\lambda x_0))^2+(Y_\nu'(\lambda x_0))^2}\int_{x_0}^{+\infty} dt\ t\,\Psi_\nu(\lambda t) f(t) \qquad f'(x_0)=0$$

$$\Psi_\nu(\lambda x)=J_\nu(\lambda x)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_\nu(\lambda x)J_\nu'(\lambda x_0) \quad avec \quad J_\nu'(x)=\left.\frac{\partial J_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=x} \quad Y_\nu'(x)=\left.\frac{\partial Y_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=x}$$

$J_\nu(\lambda x)$ *fonction de Bessel de première espèce*

$Y_\nu(\lambda x)$ *fonction de Bessel de deuxième espèce*

$$\Leftrightarrow\begin{cases} F(\lambda)=\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} dt\ t\,\Psi_\nu(\lambda t) f(t) \\ f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} d\lambda\ \frac{\lambda\,\Psi_\nu(\lambda x)}{(J_\nu'(\lambda x_0))^2+(Y_\nu'(\lambda x_0))^2} F(\lambda)\end{cases}$$

<u>Transformation sur l'intervalle [x_0,+∞) appelée transformation de Weber/Robin: condition homogène de Robin sur le rayon intérieur</u>

D'après l'article de R.K.M. Thambynayagam et T.M.Habashy, 2003 « A new Weber-Type Transform », un développement intégral existe également sur l'intervalle [x_0,+∞) utilisant les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce, avec les mêmes conditions imposées aux fonctions f(x), pour des fonctions f(x) dont une combinaison linéaire de la fonction et de sa dérivée première s'annule en $x=x_0$:

$$f(x)=\int_0^{+\infty} d\lambda\ \frac{\lambda\,\Psi_\nu(\lambda x)}{\left(J_\nu(\lambda x_0)+h\lambda J_\nu'(\lambda x_0)\right)^2+\left(Y_\nu(\lambda x_0)+h\lambda Y_\nu'(\lambda x_0)\right)^2}\int_{x_0}^{+\infty} dt\ t\,\Psi_\nu(\lambda t)f(t)$$

$$f(x_0)+hf'(x_0)=0 \qquad \begin{cases} J_\nu(\lambda x) & \text{fonction de Bessel de première espèce} \\ Y_\nu(\lambda x) & \text{fonction de Bessel de deuxième espèce} \end{cases}$$

$$\Psi_\nu(\lambda x)=J_\nu(\lambda x)\{Y_\nu(\lambda x_0)+h\lambda Y_\nu'(\lambda x_0)\}-Y_\nu(\lambda x)\{J_\nu(\lambda x_0)+h\lambda J_\nu'(\lambda x_0)\}$$

$$\Rightarrow \Psi_\nu(\lambda x_0)+h\lambda\Psi_\nu'(\lambda x_0)=0$$

$$avec \quad J_\nu'(x)=\left.\frac{\partial J_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=x} \qquad Y_\nu'(x)=\left.\frac{\partial Y_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=x} \qquad \Psi_\nu'(x)=\left.\frac{\partial \Psi_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F(\lambda)=\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} dt\ t\,\Psi_\nu(\lambda t)f(t) \\ f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} d\lambda\ \frac{\lambda\,\Psi_\nu(\lambda x)}{\left(J_\nu(\lambda x_0)+h\lambda J_\nu'(\lambda x_0)\right)^2+\left(Y_\nu(\lambda x_0)+h\lambda Y_\nu'(\lambda x_0)\right)^2}F(\lambda) \end{cases}$$

En posant h=α/β, il vient :

$$f(x)=\int_0^{+\infty} d\lambda\ \frac{\lambda\Psi_\nu(\lambda x)}{\left(\alpha\lambda J_\nu'(\lambda x_0)+\beta\,J_\nu(\lambda x_0)\right)^2+\left(\alpha\lambda\,Y_\nu'(\lambda x_0)+\beta\,Y_\nu(\lambda x_0)\right)^2}\int_{x_0}^{+\infty} dt\ t\,\Psi_\nu(\lambda t)f(t)$$

$$\alpha\,f'(x_0)+\beta\,f(x_0)=0 \qquad \begin{cases} J_\nu(\lambda x) & \text{fonction de Bessel de première espèce} \\ Y_\nu(\lambda x) & \text{fonction de Bessel de deuxième espèce} \end{cases}$$

$$\Psi_\nu(\lambda x)=\left(J_\nu(\lambda x)\{\lambda\alpha\,Y_\nu'(\lambda x_0)+\beta\,Y_\nu(\lambda x_0)\}-Y_\nu(\lambda x)\{\lambda\alpha\,J_\nu'(\lambda x_0)+\beta\,J_\nu(\lambda x_0)\}\right)$$

$$avec \quad J_\nu'(x)=\left.\frac{\partial J_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=x} \qquad Y_\nu'(x)=\left.\frac{\partial Y_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=x} \qquad \Psi_\nu'(x)=\left.\frac{\partial \Psi_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=x}$$

$$\alpha\lambda\,\Psi_\nu'(\lambda x_0)+\beta\,\Psi_\nu(\lambda x_0)=\alpha\lambda\left(J_\nu'(\lambda x_0)\{\lambda\alpha\,Y_\nu'(\lambda x_0)+\beta\,Y_\nu(\lambda x_0)\}-Y_\nu'(\lambda x_0)\{\lambda\alpha\,J_\nu'(\lambda x_0)+\beta\,J_\nu(\lambda x_0)\}\right)$$
$$+\beta\left(J_\nu(\lambda x_0)\{\lambda\alpha\,Y_\nu'(\lambda x_0)+\beta\,Y_\nu(\lambda x_0)\}-Y_\nu(\lambda x_0)\{\lambda\alpha\,J_\nu'(\lambda x_0)+\beta\,J_\nu(\lambda x_0)\}\right)$$
$$=\alpha\lambda\beta\left(Y_\nu(\lambda x_0)J_\nu'(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_\nu'(\lambda x_0)\right)+\beta\lambda\alpha\left(Y_\nu'(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)-J_\nu'(\lambda x_0)Y_{\nu 0}(\lambda x)\right)$$
$$=0$$

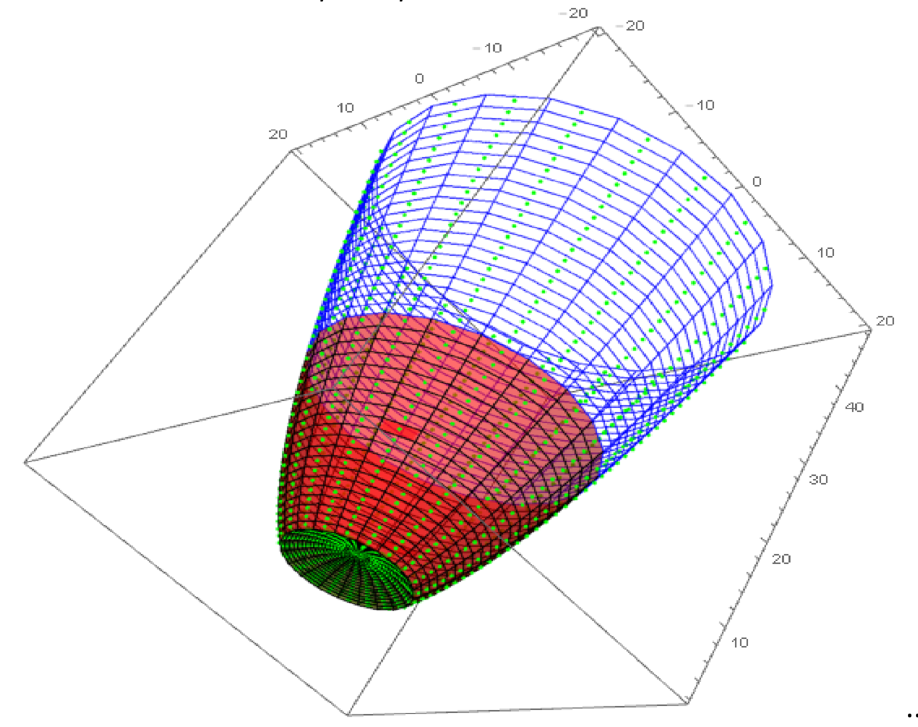
$$\Leftrightarrow \begin{cases} F(\lambda)=\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} dt\ t\,\Psi_\nu(\lambda t)f(t) \\ f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} d\lambda\ \frac{\lambda\,\Psi_\nu(\lambda x)}{\left(\lambda\alpha\,J_\nu'(\lambda x_0)+\beta\,J_\nu(\lambda x_0)\right)^2+\left(\lambda\alpha\,Y_\nu'(\lambda x_0)+\beta\,Y_\nu(\lambda x_0)\right)^2}F(\lambda) \end{cases}$$

Et l'on retrouve les deux transformations intégrales Weber/Dirichlet (α=0, β=1) et Weber/Neumann (α=1, β=0).

<u>Développement en série pour les problèmes aux limites intérieur de Dirichlet/Neumann, homogène en ν, inhomogène en μ sans dépendance azimutal sur le domaine frontière d'un paraboloïde de révolution tronqué plein μ€[μ₀,+∞], ν€[0,ν₀],</u>



Sur un paraboloïde de révolution tronqué et plein :



..

Commençons par un problème aux limites du paraboloïde de révolution tronqué ne dépendant pas de l'angle φ dont la solution peut se construire à l'aide d'une série avec des valeurs propres discrètes, soit sur le problème intérieur de Dirichlet :

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in[\mu_0,+\infty]\times[0,\nu_0] \quad T(\mu,\nu)\ fini$$

$$C.L. \quad \left.\frac{\alpha_{\nu_0}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\ 2}}}\frac{\partial T(\mu,\nu_0)}{\partial \nu}+\beta_{\nu_0}^{\nu}\,T(\mu,\nu_0)\right|_{\nu=\nu_0}=0 \qquad -\left.\frac{\alpha_{\mu_0}^{\mu}}{\sqrt{\mu_0^{\ 2}+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu_0,\nu)}{\partial \nu}+\beta_{\mu_0}^{\mu}\,T(\mu_0,\nu)\right|_{\mu=\mu_0}=f(\nu)$$

Remarque : lorsqu'il y a dépendance azimutale, la construction de la solution suit le même principe en décomposant la condition limite en ses quatre composante de symétrie Y+X+, Y+X-, Y-X+, Y-X-. Les fonctions propres sont alors des fonctions de Bessel d'ordre entier et le développement en série est constitué d'une double sommation, l'une sur l'ordre des fonctions de Bessel et l'autre sur les racines de l'équation transcendantale correspondant peu ou prou à des zéros de fonctions de Bessel ou de leur dérivée ou une combinaison linéaire des fonctions et des dérivées. Une telle construction a été exhiber dans le cas des paraboloides de révolution plein ou creux avec dépendance azimutale des conditions aux limites. La solution est suffisamment complexe à écrire pour l'on se restreigne ici au cas plus simple sans dépendance azimutale.

Ici on reprend certaines des solutions déjà calculées en changeant les fonctions de Bessel I par K en μ:

$$M_n(\mu) = A_\mu I_0(\lambda_n \mu) + B_\mu K_0(\lambda_n \mu)$$
$$N_n(\nu) = A_\nu J_0(\lambda_n \nu) + B_\nu Y_0(\lambda_n \nu)$$
$$T(\mu,\nu) \text{ fini lorsque } \mu \to \infty \Rightarrow A_\mu = 0 \quad T(\mu,\nu) \text{ fini lorsque } \nu \to 0 \Rightarrow B_\nu = 0$$
$$T(\mu,\nu) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n K_0(\lambda_n \mu) J_0(\lambda_n \nu)$$
$$C.L. \Rightarrow \alpha_{\nu_0}^{\nu} \frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \nu} + \beta_{\nu_0}^{\nu} T(\mu,\nu)\Big|_{\nu=\nu_0} = 0 \Rightarrow \lambda_n \quad tq \quad \alpha_{\nu_0}^{\nu} \lambda_n J_1(\lambda_n \nu_0) = \beta_{\nu_0}^{\nu} J_0(\lambda_n \nu_0)$$

Normes des fonctions propres :

$$\|N_n(\nu)\|^2 = \int_0^{\nu_0} d\nu\, \nu\, N_n(\nu)^2 = \frac{\left[\nu^2\left(\frac{1}{\lambda_n^2}(N_n'(\nu))^2 + (N_n(\nu))^2\right)\right]_0^{\nu_0}}{2} = \frac{\nu_0^2\left((J_1(\lambda_n \nu_0))^2 + (J_0(\lambda_n \nu_0))^2\right)}{2}$$

Trois formes

$$\|N_n(\nu)\|^2 = \frac{\nu_0^2\left((J_1(\lambda_n \nu_0))^2 + (J_0(\lambda_n \nu_0))^2\right)}{2} = \frac{\nu_0^2 (J_0(\lambda_n \nu_0))^2\left(\lambda_n^2(\alpha_{\nu_0}^{\nu})^2 + (\beta_{\nu_0}^{\nu})^2\right)}{2\lambda_n^2(\alpha_{\nu_0}^{\nu})^2} = \frac{\nu_0^2 (J_1(\lambda_n \nu_0))^2\left((\beta_{\nu_0}^{\nu})^2 + \lambda_n^2(\alpha_{\nu_0}^{\nu})^2\right)}{2(\beta_{\nu_0}^{\nu})^2}$$

La prise en compte de la condition aux limites en $\nu=\nu_0$ conduit à l'élaboration des intégrales suivantes pour la détermination des coefficients du développement en série :

$$-\frac{\alpha_{\mu_0}^{\mu}}{\sqrt{\mu_0^2+\nu^2}} \frac{\partial T(\mu_0,\nu)}{\partial \nu} + \beta_{\mu_0}^{\mu} T(\mu_0,\nu) = f_{\partial\Omega}(\nu)$$

$$T(\mu,\nu) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n K_0(\lambda_n \mu) J_0(\lambda_n \nu) \Rightarrow A_n = \frac{1}{\|N_n(\nu)\|^2} \int_0^{\nu_0} d\nu\, \nu \frac{\sqrt{\mu_0^2+\nu^2}\, J_0(\lambda_n \nu) f(\nu)}{\left(\lambda_n \alpha_{\mu_0}^{\mu} K_1(\lambda_n \mu_0) + \beta_{\mu_0}^{\mu} \sqrt{\mu_0^2+\nu^2}\, K_0(\lambda_n \mu_0)\right)}$$

Résumons, la solution s'écrit :

$$T(\mu,\nu) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n K_0(\lambda_n \mu) J_0(\lambda_n \nu) \qquad \lambda_n \quad tq \quad \alpha_{\nu_0}^{\nu} \lambda_n J_1(\lambda_n \nu_0) = \beta_{\nu_0}^{\nu} J_0(\lambda_n \nu_0)$$

$$\|N_n(\nu)\|^2 = \frac{\nu_0^2\left((J_1(\lambda_n \nu_0))^2 + (J_0(\lambda_n \nu_0))^2\right)}{2} = \frac{\nu_0^2 (J_0(\lambda_n \nu_0))^2\left(\lambda_n^2(\alpha_{\nu_0}^{\nu})^2 + (\beta_{\nu_0}^{\nu})^2\right)}{2\lambda_n^2(\alpha_{\nu_0}^{\nu})^2} = \frac{\nu_0^2 (J_1(\lambda_n \nu_0))^2\left((\beta_{\nu_0}^{\nu})^2 + \lambda_n^2(\alpha_{\nu_0}^{\nu})^2\right)}{2(\beta_{\nu_0}^{\nu})^2}$$

$$A_n = \frac{1}{\|N_n(\nu)\|^2} \int_0^{\nu_0} d\nu\, \nu \frac{\sqrt{\mu_0^2+\nu^2}\, J_0(\lambda_n \nu) f(\nu)}{\left(\lambda_n \alpha_{\mu_0}^{\mu} K_1(\lambda_n \mu_0) + \beta_{\mu_0}^{\mu} \sqrt{\mu_0^2+\nu^2}\, K_0(\lambda_n \mu_0)\right)}$$

Pour fixer les idées prenons des conditions aux limites homogène et inhomogène de Dirichlet :

$$\alpha^{\mu}_{\mu_0} = \alpha^{\nu}_{\nu_0} = 0 \quad \beta^{\mu}_{\mu_0} = \beta^{\nu}_{\nu_0} = 1 \Rightarrow A_n = \int_0^{\nu_0} d\nu\, \nu\, J_0(\lambda_n \nu) f_{\partial\Omega}(\nu)$$

$$\Rightarrow \quad T(\mu,\nu) = \frac{2}{\nu_0^{\ 2}} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \frac{J_0(\lambda_n \nu)}{(J_1(\lambda_n \nu_0))^2} \frac{K_0(\lambda_n \mu)}{K_0(\lambda_n \mu_0)} \quad \lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n \nu_0) = 0$$

Pour des conditions aux limites homogène et inhomogène de Neumann :

$$\alpha^{\mu}_{\mu_0} = \alpha^{\nu}_{\nu_0} = 1 \quad \beta^{\mu}_{\mu_0} = \beta^{\nu}_{\nu_0} = 0 \Rightarrow A_0 \ constante\ quelconque \quad A_n = \int_0^{\nu_0} d\nu\, \nu\, J_0(\lambda_n \nu) \sqrt{\mu_0^{\ 2} + \nu^2}\, f(\nu)$$

$$T(\mu,\nu) = A_0 + \frac{2}{\nu_0^{\ 2}} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \frac{J_0(\lambda_n \nu)}{\lambda_n (J_0(\lambda_n \nu_0))^2} \frac{K_0(\lambda_n \mu)}{K_1(\lambda_n \mu_0)} \quad \lambda_n \quad tq \quad \lambda_n J_1(\lambda_n \mu_0) = 0$$

Pour des conditions aux limites inhomogène de Neumann et homogène de Dirichlet:

$$\left.\begin{matrix} \alpha^{\mu}_{\mu_0} = 1 & \beta^{\mu}_{\mu_0} = 0 \\ \alpha^{\nu}_{\nu_0} = 0 & \beta^{\nu}_{\nu_0} = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_n = \int_0^{\nu_0} d\nu\, \nu\, J_0(\lambda_n \nu) \sqrt{\mu_0^{\ 2} + \nu^2}\, f(\nu)$$

$$T(\mu,\nu) = \frac{2}{\nu_0^{\ 2}} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \frac{J_0(\lambda_n \nu)}{\lambda_n (J_1(\lambda_n \mu_0))^2} \frac{K_0(\lambda_n \mu)}{K_1(\lambda_n \mu_0)} \quad \lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n \nu_0) = 0$$

Et enfin pour des conditions aux limites inhomogène de Dirichlet et homogène de Neumann, on doit inclure la solution de valeur propres nulle qui est la fonction propre constante en ν, amenant à un terme supplémentaire dans la solution :

$$\left.\begin{matrix} \alpha^{\mu}_{\mu_0} = 0 & \beta^{\mu}_{\mu_0} = 1 \\ \alpha^{\nu}_{\nu_0} = 1 & \beta^{\nu}_{\nu_0} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_n = \int_0^{\nu_0} d\nu\, \nu\, J_0(\lambda_n \nu) f(\nu) \quad A_0 = \int_0^{\nu_0} d\nu\, \nu\, f(\nu)$$

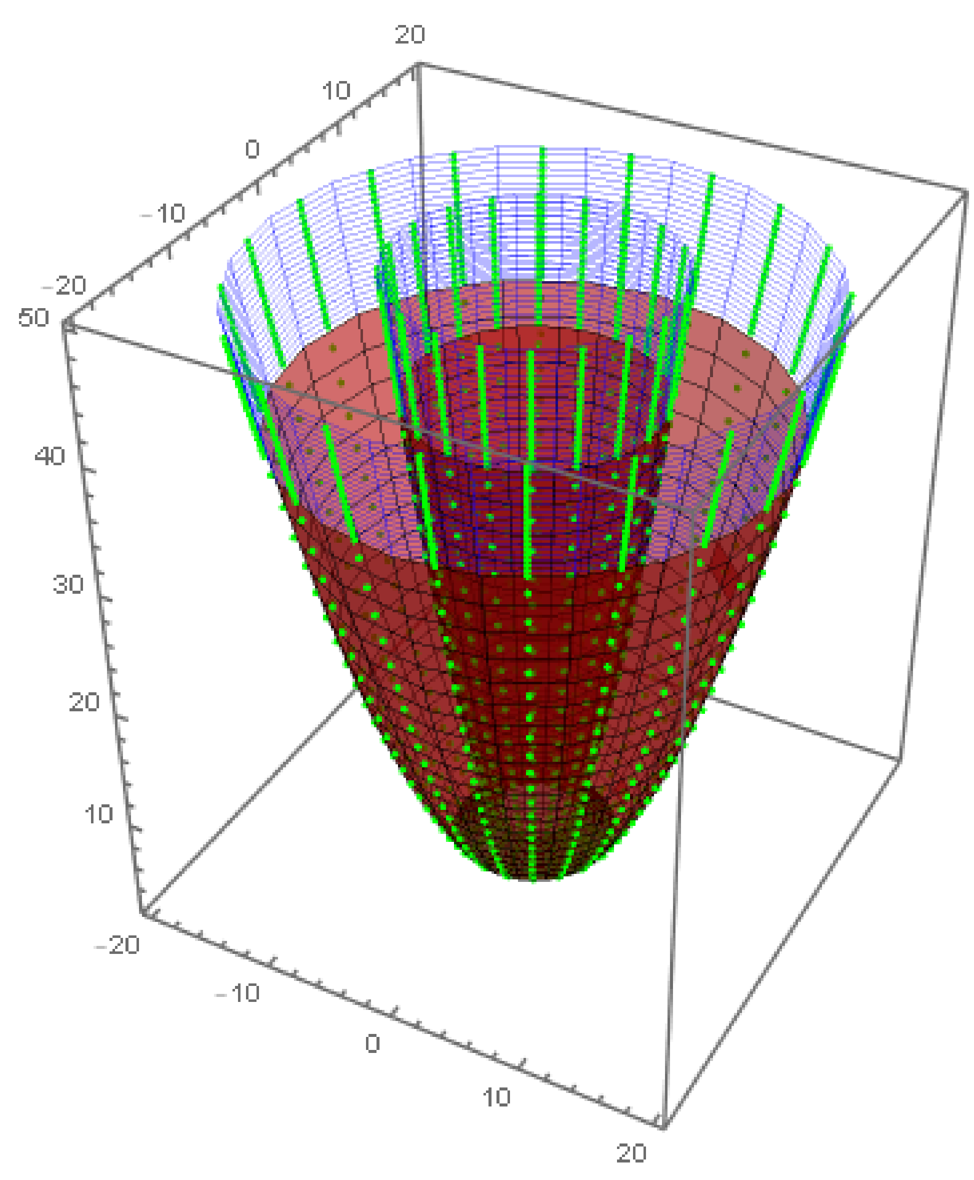
$$T(\mu,\nu) = \frac{2}{\nu_0^{\ 2}} \left(A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \frac{K_0(\lambda_n \mu)}{K_0(\lambda_n \mu_0)} \frac{J_0(\lambda_n \nu)}{(J_0(\lambda_n \nu_0))^2} \right) \quad \lambda_n \quad tq \quad \lambda_n J_1(\lambda_n \nu_0) = 0$$

$$Si \quad f(\nu) = T_0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \int_0^{\nu_0} d\nu\, \nu\, J_0(\lambda_n \nu) \propto \nu_0 J_1(\lambda_n \nu_0) = 0 \\ A_0 = \int_0^{\nu_0} d\nu\, \nu\, f(\nu) = \frac{\nu_0^{\ 2}}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow T(\mu,\nu) = T_0$$

Remarque : pour la catégorie des problèmes aux limites où la condition en μ est homogène et la condition en ν est inhomogène, il faut construire la solution à l'aide d'une transformation intégrale dîtes de Weber-Orr (aussi appelée selon les cas Weber-Dirichlet, Weber-Neumann,...)

Développement en série pour les problèmes aux limites intérieur de Dirichlet/Neumann, homogène en ν, inhomogène en μ sans dépendance azimutal sur le domaine frontière d'un paraboloïde de révolution tronqué creux μ€[μ_0,+∞], ν€[ν_1,ν_2]

Sur un paraboloïde de révolution tronqué creux :



Voici un problème aux limites du paraboloïde de révolution tronqué ne dépendant pas de l'angle φ dont la solution peut se construire à l'aide d'une série avec des valeurs propres discrètes, soit sur le problème intérieur de Dirichlet ou de Neumann :

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in[\mu_0,+\infty]\times[\nu_1,\nu_2] \quad T(\mu,\nu) \text{ fini}$$

$$C.L. \quad \begin{cases} \left.\dfrac{\alpha_{\nu_1}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+\nu_1^2}}\dfrac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \nu}+\beta_{\nu_1}^{\nu}\,T(\mu,\nu_1)\right|_{\nu=\nu_1}=0 \qquad \left.\dfrac{\alpha_{\nu_2}^{\nu}}{\sqrt{\mu^2+\nu_2^2}}\dfrac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \nu}+\beta_{\nu_2}^{\nu}\,T(\mu,\nu_2)\right|_{\nu=\nu_2}=0 \\ \left.-\dfrac{\alpha_{\mu_0}^{\mu}}{\sqrt{\mu_0^2+\nu^2}}\dfrac{\partial T(\mu_0,\nu)}{\partial \nu}+\beta_{\mu_0}^{\mu}\,T(\mu_0,\nu)\right|_{\mu=\mu_0}=f_{\mu_0}(\nu) \end{cases}$$

$$\text{Dirichlet ou Neumann} \quad \alpha_{\nu_1}^{\nu}=1-\beta_{\nu_1}^{\nu}\in\{0,1\} \quad \alpha_{\nu_2}^{\nu}=1-\beta_{\nu_2}^{\nu}\in\{0,1\} \quad \alpha_{\mu_0}^{\mu}=1-\beta_{\mu_0}^{\mu}\in\{0,1\}$$

Remarque : lorsqu'il y a dépendance azimutale, la construction de la solution suit le même principe en décomposant les conditions limites en ses quatre composantes de symétrie Y+X+, Y+X-, Y-X+, Y-X-. Les fonctions propres sont alors des fonctions de Bessel d'ordre entier et le développement en série est constitué d'une double sommation, l'une sur l'ordre des fonctions de Bessel et l'autre sur les racines de l'équation transcendantale correspondant peu ou prou à des zéros de fonctions de Bessel ou de leur dérivée ou une combinaison linéaire des fonctions et des dérivées. Une telle construction a été exhiber dans le cas des paraboloides de révolution plein ou creux avec dépendance azimutale des conditions aux limites. La solution est suffisamment complexe à écrire pour l'on se restreigne ici au cas plus simple sans dépendance azimutale.

Les fonctions propres en v et leur norme s'écrivent :

$$N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu)=\frac{J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}J_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}Y_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\quad tq\quad \frac{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}J_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}J_0'\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)+\beta_{\nu_2}^{\nu}J_0\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}=\frac{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}Y_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_2}^{\nu}\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}Y_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)+\beta_{\nu_2}^{\nu}Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}$$

$$N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)=\frac{J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}J_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}Y_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)=\frac{J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}J_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}Y_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$\frac{N_n^{\nu_1,\nu_2}{}'(\nu_1)}{\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}}=D_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)=\frac{J_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}J_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}Y_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\mu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$\frac{N_n^{\nu_1,\nu_2}{}'(\nu_2)}{\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}}=D_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)=\frac{J_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}J_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}{\alpha_{\nu_1}^{\nu}\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}Y_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)-\beta_{\nu_1}^{\nu}Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$\left\|N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2=\frac{\nu_2^{\,2}\left(\left(D_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)\right)^2+\left(N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)\right)^2\right)-\nu_1^{\,2}\left(\left(D_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)^2+\left(N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)^2\right)}{2}$$

Les fonctions en µ s'écrivent :

$$M_n(\mu)=A_\mu I_0(\lambda_n\mu)+B_\mu K_0(\lambda_n\mu)$$
$$T(\mu,\nu)\ \textit{fini lorsque}\ \mu\to\infty\Rightarrow A_\mu=0\Rightarrow M_n(\mu)=K_0(\lambda_n\mu)$$

La prise en compte de la condition aux limites en v=v$_0$ conduit à l'élaboration des intégrales suivantes pour la détermination des coefficients du développement en série :

$$-\frac{\alpha_{\mu_0}^{\mu}}{\sqrt{\mu_0^{\,2}+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu_0,\nu)}{\partial\nu}+\beta_{\mu_0}^{\mu}T(\mu_0,\nu)=f_{\mu_0}(\nu)\Rightarrow\begin{cases}A_n=\dfrac{1}{\left\|N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2}\displaystyle\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\nu\,\frac{\sqrt{\mu_0^{\,2}+\nu^2}\,N_n^{\nu_1,\nu_2}f_{\mu_0}(\nu)}{\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\alpha_{\mu_0}^{\mu}K_1\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\mu_0\right)+\beta_{\mu_0}^{\mu}\sqrt{\mu_0^{\,2}+\nu^2}\,K_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\mu_0\right)\right)}\\ T(\mu,\nu)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}A_nK_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\mu\right)N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\end{cases}$$

.

Pour fixer les idées prenons des conditions aux limites homogène et inhomogène de Dirichlet :

$$\alpha^{\mu}_{\mu_0} = \alpha^{\nu}_{\nu_1} = \alpha^{\nu}_{\nu_2} = 0 \quad \beta^{\mu}_{\mu_0} = \beta^{\nu}_{\nu_1} = \beta^{\nu}_{\nu_2} = 1 \Rightarrow A_n = \frac{1}{\left\|N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2}\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\, \nu\, \frac{N_n^{\nu_1,\nu_2} f_{\mu_0}(\nu)}{K_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\mu_0\right)}$$

$$\begin{cases} N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu) = \dfrac{J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\nu\right)}{J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} - \dfrac{Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\nu\right)}{Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} \qquad \lambda_n^{\nu_1,\nu_2} \quad tq \quad \dfrac{J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{J_0\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)} = \dfrac{Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)} \Rightarrow N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1) = N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2) = 0 \\ \dfrac{N_n^{\nu_1,\nu_2}{}'(\nu_1)}{\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}} = D_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1) = \dfrac{J_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} - \dfrac{Y_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} = -\left\{\dfrac{J_1\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} - \dfrac{Y_1\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}\right\} \\ \dfrac{N_n^{\nu_1,\nu_2}{}'(\nu_2)}{\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}} = D_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2) = \dfrac{J_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_2\right)}{J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} - \dfrac{Y_0'\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_2\right)}{Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} = -\left\{\dfrac{J_1\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}{J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} - \dfrac{Y_1\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}{Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}\right\} \\ \left\|N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2 = \dfrac{\nu_2^{\,2}\left(D_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)\right)^2 - \nu_1^{\,2}\left(D_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)^2}{2} = \dfrac{\left(\nu_2 D_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2) - \nu_1 D_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)\left(\nu_2 D_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2) + \nu_1 D_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad T(\mu,\nu) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \frac{K_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\mu\right)}{K_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\mu_0\right)} \frac{N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu)}{\left\|N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2} \qquad B_n = \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\, \nu N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu) f_{\mu_0}(\nu)$$

$$Si \quad f_{\mu_0}(\nu) = T_{\mu_0} \Rightarrow B_n = T_{\mu_0}\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\,\nu \left\{\frac{J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\nu\right)}{J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} - \frac{Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\nu\right)}{Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}\right\} = \frac{T_{\mu_0}}{\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}}\left[\frac{J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\nu\right)}{J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} - \frac{Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\nu\right)}{Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}\right]_{\nu_1}^{\nu_2}$$

$$\Rightarrow B_n = T_{\mu_0}\frac{\nu_2 D_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2) - \nu_1 D_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)}{\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}} \Rightarrow \quad T(\mu,\nu) = 2T_{\mu_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}}\frac{K_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\mu\right)}{K_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\mu_0\right)}\frac{\dfrac{J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\nu\right)}{J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)} - \dfrac{Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\nu\right)}{Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}}{\nu_2 D_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2) + \nu_1 D_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)}$$

Prenons maintenant un exemple qui illustre la prise en compte de la valeur propre nulle. Elle intervient lorsque le problème aux limites est homogène de Neumann de part et d'autre :

$$Neumann \quad \alpha^{\nu}_{\nu_1} = \alpha^{\nu}_{\nu_2} = 1 \quad \beta^{\nu}_{\nu_1} = \beta^{\nu}_{\nu_2} = 0$$

$$C.L. \quad \left.\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \nu}\right|_{\nu=\nu_1} = \left.\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \nu}\right|_{\nu=\nu_2} = 0 \qquad \left.-\frac{\alpha^{\mu}_{\mu_0}}{\sqrt{\mu_0^{\,2}+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \nu} + \beta^{\mu}_{\mu_0}\, T(\mu_0,\nu)\right|_{\mu=\mu_0} = f_{\mu_0}(\nu)$$

La solution de valeur propre nulle est de la forme A+BLog(ν) qui compte tenu des conditions homogène de Neumann est une constante que l'on peut prendre égal à un. La fonction en µ est également de la forme A+BLog(µ) qui compte tenu de la finitude de la solution cherché est également une constante. On aura donc en application de la condition aux limites inhomogène un terme constant A0 de la forme : $A_0 = \dfrac{1}{\beta^{\mu}_{\mu_0}\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\;\nu}\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\;\nu\; f_{\mu_0}(\nu) = \dfrac{2}{\beta^{\mu}_{\mu_0}\left(\nu_2^{\,2}-\nu_1^{\,2}\right)}\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\;\nu\; f_{\mu_0}(\nu)$.

Ce qui donne la solution générale suivante :

$$N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu)=\frac{J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\nu\right)}{J_1\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\nu\right)}{Y_1\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}\qquad \lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\quad tq\quad \frac{J_1\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{J_1\left(\lambda_{m,n}^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}=\frac{Y_1\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}{Y_1\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_2\right)}$$

$$N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)=\frac{J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_1\right)}{J_1\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_1\right)}{Y_1\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}\qquad N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)=\frac{J_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_2\right)}{J_1\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}-\frac{Y_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\nu_2\right)}{Y_1\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\nu_1\right)}$$

$$\frac{N_n^{\nu_1,\nu_2}\,'(\nu_1)}{\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}}=D_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)=\frac{N_n^{\nu_1,\nu_2}\,'(\nu_2)}{\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}}=D_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)=0\Rightarrow\left\|N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2=\frac{{\nu_2}^2\left(N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_2)\right)^2-{\nu_1}^2\left(N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu_1)\right)^2}{2}$$

$$A_0=\frac{2}{\beta_{\mu_0}^{\mu}\left({\nu_2}^2-{\nu_1}^2\right)}\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\;\nu\;f_{\mu_0}(\nu)\qquad A_n=\frac{1}{\left\|N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu)\right\|^2}\int_{\nu_1}^{\nu_2}d\nu\,\nu\,\frac{\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}\,N_n^{\nu_1,\nu_2}f_{\mu_0}(\nu)}{\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\alpha_{\mu_0}^{\mu}K_1\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\mu_0\right)+\beta_{\mu_0}^{\mu}\sqrt{{\mu_0}^2+\nu^2}\,K_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\mu_0\right)\right)}$$

$$T(\mu,\nu)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}A_nK_0\left(\lambda_n^{\nu_1,\nu_2}\,\mu\right)N_n^{\nu_1,\nu_2}(\nu)$$

.

Avec une fonction limite constante T_0 pour une conditions inhomogène de Dirichlet, tous les termes An s'annulent et il ne reste que la solution triviale A_0=T_0.

Remarque : pour la catégorie des problèmes aux limites où la condition en μ est homogène et la condition en ν est inhomogène, il faut construire la solution à l'aide d'une transformation intégrale dîtes de Weber-Orr (aussi appelée selon les cas Weber-Dirichlet, Weber-Neumann,...)

<u>Transformation intégrale pour les problèmes aux limites extérieur de Dirichlet/Neumann, homogène en ν, inhomogène en μ sans dépendance azimutal sur le domaine frontière d'un paraboloïde de révolution tronqué μ€[μ₀,+∞]</u>

Pour le problème extérieur en ν :

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in[\mu_0,+\infty]\times[\nu_0,+\infty] \quad T(\mu,\nu)\ fini$$

$$C.L. \quad \left.\frac{\alpha^{\nu}_{\nu_0}}{\sqrt{\mu^2+\nu_0{}^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu_0)}{\partial\nu}+\beta^{\nu}_{\nu_0}T(\mu,\nu_0)\right|_{\nu=\nu_0}=0 \qquad \left.-\frac{\alpha^{\mu}_{\mu_0}}{\sqrt{\mu_0{}^2+\nu^2}}\frac{\partial T(\mu_0,\nu)}{\partial\nu}+\beta^{\mu}_{\mu_0}T(\mu_0,\nu)\right|_{\mu=\mu_0}=f(\nu)$$

Rien qu'en se restreignant à la condition aux limites homogènes de Dirichlet en ν, on retrouve la même constatation que pour le problème homogène en μ=μ0, conduisant à une solution intégrale utilisant les transformations intégrales de Weber !

Pour une condition de Dirichlet inhomogène en μ:

$$\Psi_0(\lambda\nu)=J_0(\lambda\nu)Y_0(\lambda\nu_0)-Y_0(\lambda\nu)J_0(\lambda\nu_0)$$

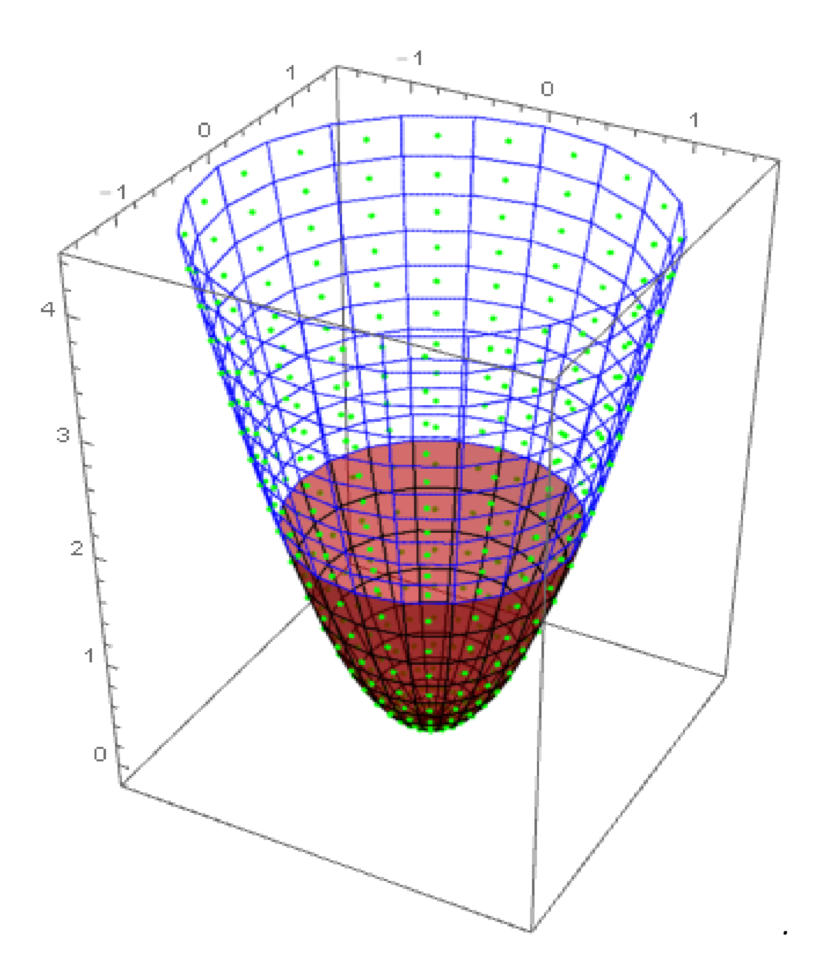
$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty}d\lambda\frac{\lambda C(\lambda)}{(J_0(\lambda\nu_0))^2+(Y_0(\lambda\nu_0))^2}\Psi_0(\lambda\nu)\frac{K_0(\lambda\mu)}{K_0(\lambda\mu_0)} \qquad avec \quad C(\lambda)=\int_{\nu_0}^{+\infty}d\nu\,\nu\Psi_0(\lambda\nu)f(\nu)$$

Pour une condition de Neumann inhomogène en μ:

$$\left.\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=\mu_0}=-\sqrt{\mu_0{}^2+\nu^2}f(\mu) \quad \Psi_0(\lambda\nu)=J_0(\lambda\nu)Y_0(\lambda\nu_0)-Y_0(\lambda\nu)J_0(\lambda\nu_0)$$

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty}d\lambda\frac{C(\lambda)}{(J_0(\lambda\nu_0))^2+(Y_0(\lambda\nu_0))^2}\Psi_0(\lambda\nu)\frac{K_0(\lambda\mu)}{K_1(\lambda\mu_0)} \quad avec \quad C(\lambda)=\int_{\nu_0}^{+\infty}d\nu\,\nu\Psi_0(\lambda\nu)\sqrt{\mu_0{}^2+\nu^2}f(\nu)$$

<u>Transformation intégrale: application aux problèmes aux limites intérieur et extérieur de Dirichlet sans dépendance azimutal domaine frontière d'un paraboloïde de révolution complet µ€[0,∞]</u>



Avec le théorème de Hankel, il devient possible de construire une représentation intégrale de la solution. D'abord sur le problème intérieur (problème convexe) :

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in[0,+\infty]\times[0,\nu_0] \quad T(\mu,\nu) \text{ fini} \quad C.L. \quad T(\mu,\nu)|_{\nu=\nu_0}=f(\mu)$$

sous la forme suivante :

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty} d\lambda\, \lambda J_0(\lambda\mu)C(\lambda)\frac{I_0(\lambda\nu)}{I_0(\lambda\nu_0)} \qquad avec \quad C(\lambda)=\int_0^{+\infty} d\mu\, \mu J_0(\lambda\mu)f(\mu)$$

*Tandis que pour l'extérieur du domaine (problème concave)**:***

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in[0,+\infty]\times[\nu_0,+\infty] \quad T(\mu,\nu) \text{ fini} \quad C.L. \quad T(\mu,\nu)|_{\nu=\nu_0}=f(\mu)$$

sous la forme suivante :

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty} d\lambda\, \lambda J_0(\lambda\mu)C(\lambda)\frac{K_0(\lambda\nu)}{K_0(\lambda\nu_0)} \quad avec \quad C(\lambda)=\int_0^{+\infty} d\mu\, \mu J_0(\lambda\mu)f(\mu)$$

En revenant sur la solution du problème intérieur :

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty} d\lambda\,\lambda J_0(\lambda\mu)C(\lambda)\frac{I_0(\lambda\nu)}{I_0(\lambda\nu_0)} \qquad avec \quad C(\lambda)=\int_0^{+\infty} d\mu\,\mu J_0(\lambda\mu)f(\mu)$$

Prenons une fonction limite en palier de la forme : $f(\mu)=\begin{cases} T_0 & \nu\in[0,\mu_0] \\ 0 & \nu\in[\mu_0,+\infty[\end{cases}$

La solution s'écrit :

$$C(\lambda)=\frac{T_0}{\lambda^2}\int_0^{\lambda\mu_0} dz\,zJ_0(z)=\frac{T_0}{\lambda^2}\left[zJ_1(z)\right]_0^{\lambda\mu_0}=T_0\frac{\mu_0 J_1(\lambda\mu_0)}{\lambda}$$

$$\Rightarrow T(\mu,\nu)=T_0\mu_0\int_0^{+\infty} d\lambda\,J_0(\lambda\mu)J_1(\lambda\mu_0)\frac{I_0(\lambda\nu)}{I_0(\lambda\nu_0)}$$

Cette solution est à rapprocher d'un problème déjà étudié et dont la solution se présente sous forme de série. La solution du problème aux limites formulé sur le paraboloïde de révolution μ=μ0, se présentait sous la forme :

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in[0,\mu_0]\times[0,+\infty] \quad T(\mu,\nu)\ fini \quad C.L. \quad T(\mu,\nu)\big|_{\mu=\mu_0}=\begin{cases} T_0 & \nu\in[0,\nu_0] \\ 0 & \nu\in[\nu_0,+\infty] \end{cases}$$

$$T(\mu,\nu)=\begin{cases} T_{\Omega_1}(\mu,\nu) & \forall(\mu,\nu)\in\Omega_1=[0,\mu_0]\times[0,\nu_0] \\ T_{\Omega_2}(\mu,\nu) & \forall(\mu,\nu)\in\Omega_2=[0,\mu_0]\times[\nu_0,+\infty] \end{cases} \qquad \lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n\mu_0)=0$$

$$T_{\Omega_1}(\mu,\nu)=\frac{2T_0}{\mu_0}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\lambda_n\mu)}{\lambda_n J_1(\lambda_n\mu_0)}\frac{K_1(\lambda_n\nu_0)(I_0(\lambda_n\nu_0)-I_0(\lambda_n\nu))+I_1(\lambda_n\nu_0)K_0(\lambda_n\nu_0)}{(I_0(\lambda_n\nu_0)K_1(\lambda_n\nu_0)+I_1(\lambda_n\nu_0)K_0(\lambda_n\nu_0))}\right)$$

$$T_{\Omega_2}(\mu,\nu)=\frac{2T_0}{\mu_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\lambda_n\mu)}{\lambda_n J_1(\lambda_n\mu_0)}\frac{I_1(\lambda_n\nu_0)K_0(\lambda_n\nu)}{(I_0(\lambda_n\nu_0)K_1(\lambda_n\nu_0)+I_1(\lambda_n\nu_0)K_0(\lambda_n\nu_0))}$$

Par échange des variables μ et ν, formulé sur le paraboloïde de révolution ν=ν0, cela donne :

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in[0,+\infty]\times[0,\nu_0] \quad T(\mu,\nu)\ fini \quad C.L. \quad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu}=\begin{cases} T_0 & \mu\in[0,\mu_0] \\ 0 & \mu\in[\mu_0,+\infty] \end{cases}$$

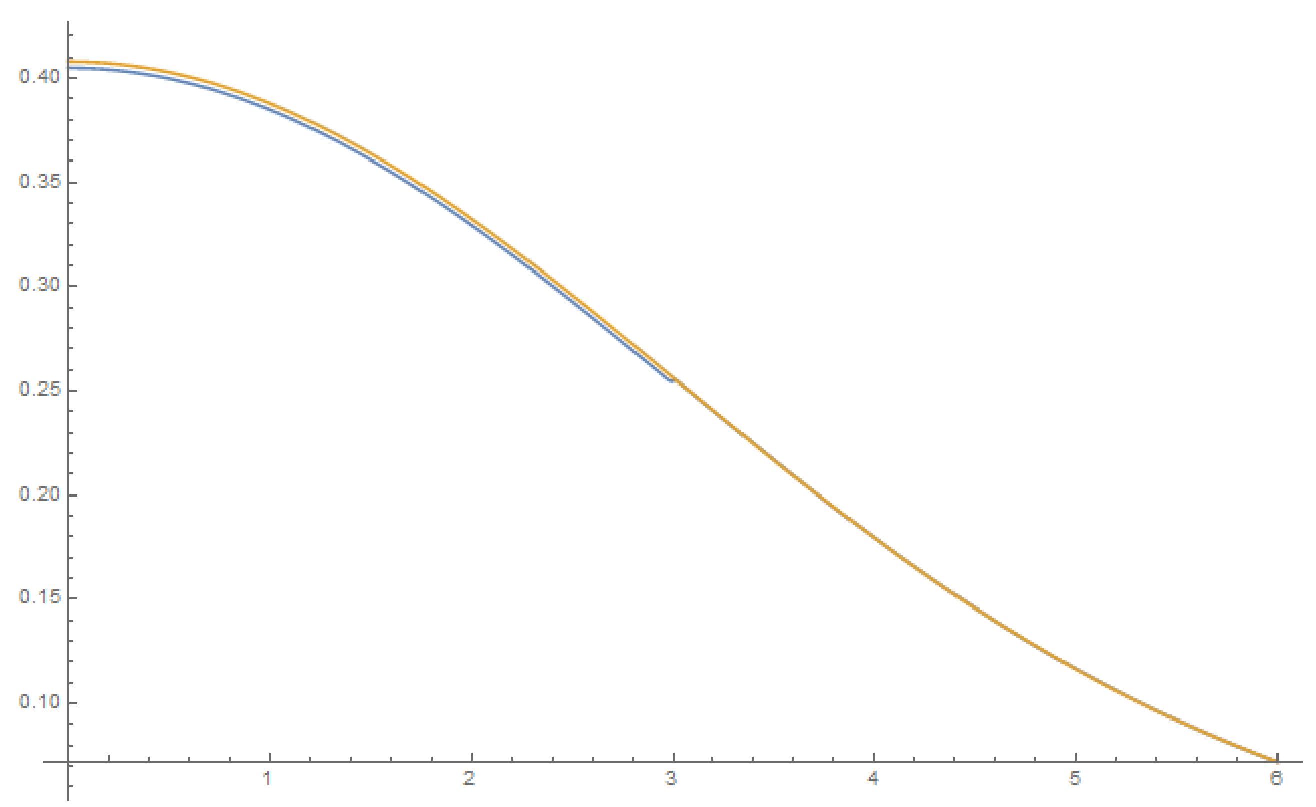
$$T(\mu,\nu)=\begin{cases} T_{\Omega_1}(\mu,\nu) & \forall(\mu,\nu)\in\Omega_1=[0,\mu_0]\times[0,\nu_0] \\ T_{\Omega_2}(\mu,\nu) & \forall(\mu,\nu)\in\Omega_2=[\mu_0,+\infty]\times[0,\nu_0] \end{cases} \qquad \lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n\nu_0)=0$$

$$\begin{cases} T_{\Omega_1}(\mu,\nu)=\dfrac{2T_0}{\nu_0}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\lambda_n\nu)}{\lambda_n J_1(\lambda_n\nu_0)}\frac{K_1(\lambda_n\mu_0)(I_0(\lambda_n\mu_0)-I_0(\lambda_n\mu))+I_1(\lambda_n\mu_0)K_0(\lambda_n\mu_0)}{(I_0(\lambda_n\mu_0)K_1(\lambda_n\mu_0)+I_1(\lambda_n\mu_0)K_0(\lambda_n\mu_0))}\right) \\ T_{\Omega_2}(\mu,\nu)=\dfrac{2T_0}{\nu_0}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\lambda_n\nu)}{\lambda_n J_1(\lambda_n\nu_0)}\frac{I_1(\lambda_n\mu_0)K_0(\lambda_n\mu)}{(I_0(\lambda_n\mu_0)K_1(\lambda_n\mu_0)+I_1(\lambda_n\mu_0)K_0(\lambda_n\mu_0))} \end{cases}$$

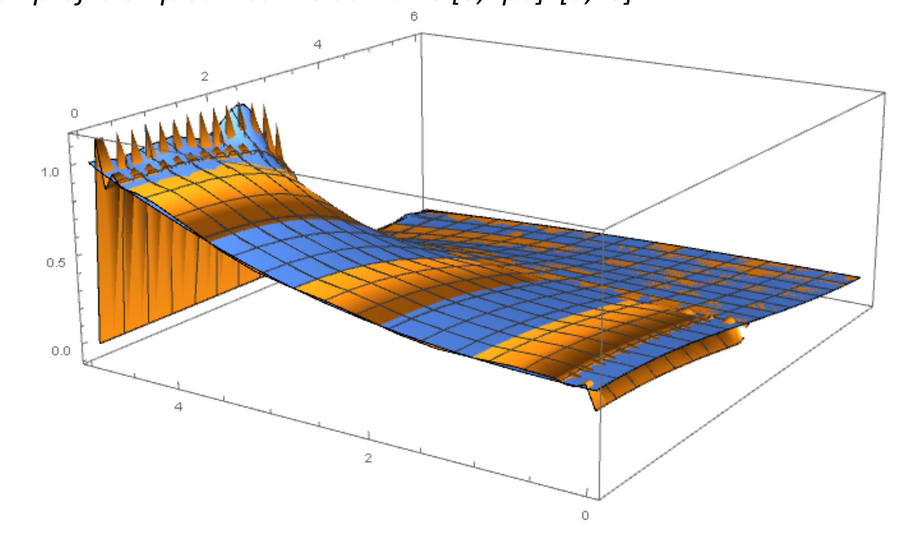
$$\Leftrightarrow T(\mu,\nu)=T_0\mu_0\int_0^{+\infty} d\lambda\,J_0(\lambda\mu)J_1(\lambda\mu_0)\frac{I_0(\lambda\nu)}{I_0(\lambda\nu_0)}$$

Nous avons tracé le profil des deux solutions notamment sur l'axe de révolution du paraboloïde, on constate un léger décrochement de valeurs entre les deux sous-domaines, dû à un défaut de convergence avec un nombre de terme de la série limité. Mais dès que l'on s'éloigne de l'axe de révolution les deux profils coïncident parfaitement :

Par exemple pour une valeur de μ0=3 et v0=5, les deux profils en μ pour la valeur v=v0/5=1, donnent :



Et pour les deux profils en μ et v sur le domaine [0,2μ0]x[0,v0] :



On observe le décrochage entre les deux solutions uniquement sur l'intervalle [0,μ0] pour des valeurs de v proche de zéro (soit l'axe de révolution z du paraboloïde).

Transformation intégrale: application des transformées de Hankel à la résolution des problèmes aux limites de l'équation de Laplace : problème de Dirichlet électrostatique dans l'espace convexe (intérieur) d'un paraboloïde de révolution v=v0, potentiel dû à une charge placée au foyer de la parabole :

La parabole v=v0 a pour équation implicite cartésienne ou cylindrique (ρ,z) :

$$x^2+y^2=\rho^2=a^2\,\mu^2\nu^2 \quad z=a\frac{\mu^2-\nu^2}{2} \quad avec \quad 0\le\mu,\nu<+\infty$$

$$\nu=\nu_0 \Rightarrow \rho^2=a^2\,\mu^2{\nu_0}^2 \Rightarrow z=\frac{\rho^2-a^2{\nu_0}^4}{2a{\nu_0}^2}$$

Les sommet et foyer de la parabole se trouvent sur l'axe z aux points suivants :

$$\rho=Az^2+Bz+C \Rightarrow sommet\,(\rho,z)=\left(-\frac{B}{2A},-\frac{B^2-4AC}{4A}\right) \quad foyer\,(\rho,z)=\left(-\frac{B}{2A},\frac{1-B^2+4AC}{4A}\right)$$

$$\Rightarrow B=0 \quad A=\frac{1}{2a{\nu_0}^2} \quad C=-\frac{a{\nu_0}^2}{2} \quad AC=-\frac{1}{4}$$

$$sommet \Rightarrow \rho=0, z=-\frac{a^2{\nu_0}^4}{2a{\nu_0}^2}=-\frac{a{\nu_0}^2}{2} \qquad foyer \Rightarrow \rho=0, z=0$$

Le foyer est donc l'origine des coordonnées cartésiennes. Dans ce cas la charge provoque un potentiel de la forme :

$$T_q(\rho,z)=\frac{T_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{T_0}{a\sqrt{\mu^2\nu^2+\left(\frac{\mu^2-\nu^2}{2}\right)^2}}=\frac{2T_0}{a\sqrt{4\mu^2\nu^2+(\mu^2-\nu^2)^2}}$$

$$\Rightarrow T_q(\mu,\nu)=\frac{2T_0}{a\sqrt{(\mu^2+\nu^2)^2}}=\frac{2T_0}{a(\mu^2+\nu^2)}$$

La charge induite sur la surface du paraboloïde de révolution parfaitement conducteur annule le potentiel sur ces derniers en v=v0. Le potentiel se décompose en deux fonctions sous la forme :

$$T(\mu,\nu)=T_q(\mu,\nu)+T_s(\mu,\nu)=\frac{2T_0}{a(\mu^2+\nu^2)}+T_s(\mu,\nu)$$

Le dernier potentiel est solution du problème aux limites :

$$\Delta T_s(\mu,\nu)=0 \quad \mu\in[0,\infty) \quad \nu\in[0,\nu_0] \quad T_s(+\infty,\nu) \quad fini$$

$$T_s(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty}d\lambda\;\lambda J_0(\lambda\mu)C(\lambda)\frac{I_0(\lambda\nu)}{I_0(\lambda\nu_0)} \quad avec \quad C(\lambda)=\int_0^{+\infty}d\mu\;\mu J_0(\lambda\mu)f(\mu)$$

$$f(\mu)=T_s(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=-\frac{2T_0}{a(\mu^2+{\nu_0}^2)} \Rightarrow C(\lambda)=-\frac{2T_0}{a}\int_0^{+\infty}d\mu\;\frac{\mu J_0(\lambda\mu)}{\mu^2+{\nu_0}^2}$$

$$Or\ il\ s'avère\ que \quad \int_0^{+\infty}d\mu\;\frac{\mu J_0(\lambda\mu)}{\mu^2+{\nu_0}^2}=K_0(\lambda\nu_0)$$

$$T_s(\mu,\nu)=-\frac{2T_0}{a}\int_0^{+\infty}d\lambda\;\lambda J_0(\lambda\mu)K_0(\lambda\nu_0)\frac{I_0(\lambda\nu)}{I_0(\lambda\nu_0)}$$

$$\Rightarrow T(\mu,\nu)=\frac{2T_0}{a(\mu^2+\nu^2)}-\frac{2T_0}{a}\int_0^{+\infty}d\lambda\;\lambda J_0(\lambda\mu)K_0(\lambda\nu_0)\frac{I_0(\lambda\nu)}{I_0(\lambda\nu_0)}$$

Transformation intégrale: application aux problèmes aux limites intérieur et extérieur inhomogène de Neumann en v sans dépendance azimutal domaine frontière d'un paraboloïde de révolution complet µ€[0,∞]

Avec le théorème de Hankel, il devient possible de construire une représentation intégrale de la solution. D'abord sur le problème convexe intérieur :

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in[0,+\infty]\times[0,\nu_0] \quad T(\mu,\nu)\ fini$$

$$C.L. \quad \frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu_0^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=\nu_0}=f(\mu)\Leftrightarrow \frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=\nu_0}=\sqrt{\mu^2+\nu_0^2}\,f(\mu)$$

sous la forme suivante :

$$T(\mu,\nu)\ de\ la\ forme \quad T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty} d\lambda\,\lambda J_0(\lambda\mu)D(\lambda)\,I_0(\lambda\nu)\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} d\lambda\,\lambda J_0(\lambda\mu)C(\lambda)\frac{I_0(\lambda\nu)}{\lambda I_1(\lambda\nu_0)}$$

$$Il\ suffit\ de\ poser\ arbitrairement\ D(\lambda)=\frac{C(\lambda)}{\lambda I_1(\lambda\nu_0)}$$

$$Donc \quad \frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=\nu_0}=\sqrt{\mu^2+\nu_0^2}\,f(\mu)\Rightarrow \int_0^{+\infty} d\lambda\,\lambda^2 J_0(\lambda\mu)C(\lambda)\frac{I_1(\lambda\nu_0)}{I_1(\lambda\nu_0)}=\sqrt{\mu^2+\nu_0^2}\,f(\mu)$$

$$\Rightarrow C(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} d\mu\,\mu J_0(\lambda\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_0^2}\,f(\mu) \quad T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty} d\lambda\,\lambda J_0(\lambda\mu)C(\lambda)\frac{I_0(\lambda\nu)}{I_1(\lambda\nu_0)}$$

$$Soit\ en\ simplifiant$$

$$C(\lambda)=\int_0^{+\infty} d\mu\,\mu J_0(\lambda\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_0^2}\,f(\mu) \quad T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty} d\lambda\,J_0(\lambda\mu)C(\lambda)\frac{I_0(\lambda\nu)}{I_1(\lambda\nu_0)}$$

*Tandis que pour l'extérieur du domaine (problème concave)**:***

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in[0,+\infty]\times[\nu_0,+\infty] \quad T(\mu,\nu)\ fini$$

$$C.L. \quad \frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu_0^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=\nu_0}=-f(\mu)\Leftrightarrow \frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=\nu_0}=-\sqrt{\mu^2+\nu_0^2}\,f(\mu)$$

sous la forme suivante :

$$\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=\nu_0}=-\sqrt{\mu^2+\nu_0^2}\,f(\mu) \quad \frac{\partial K_0(\lambda\nu)}{\partial \nu}=-\lambda K_1(\lambda\nu_0)$$

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty} d\lambda\,J_0(\lambda\mu)C(\lambda)\frac{K_0(\lambda\nu)}{K_1(\lambda\nu_0)} \quad avec \quad C(\lambda)=\int_0^{+\infty} d\mu\,\mu J_0(\lambda\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_0^2}\,f(\mu)$$

Etant donné que le flux est fixé (condition inhomogène de Neumann), la solution est toujours valable à une constante près.

<u>Transformation intégrale: application aux problèmes aux limites inhomogène en v intérieur et extérieur de Dirichlet avec dépendance azimutal</u>

Le problème aux limites a la forme suivante :

$$\Delta T(\mu,\nu,\varphi)=0 \quad (\mu,\nu,\varphi)\in[0,+\infty]\times[0,\nu_0]\times[0,2\pi] \quad T(\mu,\nu,\varphi)\ fini$$

$$C.L. \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu,\varphi)$$

Cette fois-ci le développement de la solution se fait tant en intégrale qu'en série, sous la forme :

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda J_n(\lambda\mu)\big(C_n(\lambda)\,I_n(\lambda\nu)+D_n(\lambda)K_n(\lambda\nu)\big)\big(A_n(\lambda)\,Cos(n\varphi)+B_n(\lambda)Sin(n\varphi)\big)$$

Plus particulièrement sur un domaine intérieur, il viendrait avec le théorème de Hankel :

$$\Delta T(\mu,\nu,\varphi)=0 \quad (\mu,\nu,\varphi)\in[0,+\infty]\times[0,\nu_0]\times[0,2\pi] \quad T(\mu,\nu,\varphi)\ fini \quad C.L. \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu,\varphi)$$

$$f(\mu,\varphi)=f_{Y+,X+}(\mu,\varphi)+f_{Y+,X-}(\mu,\varphi)+f_{Y-,X+}(\mu,\varphi)+f_{Y-,X-}(\mu,\varphi), \quad sachant\ que \quad f(\mu,\varphi)=f(\mu,2\pi+\varphi)$$

$$f_{Y+,X+}(\mu,\varphi)=\frac{f(\mu,\varphi)+f(\mu,\pi-\varphi)+f(\mu,-\varphi)+f(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{Y+,X-}(\mu,\varphi)=\frac{f(\mu,\varphi)+f(\mu,\pi-\varphi)-f(\mu,-\varphi)-f(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{Y-,X+}(\mu,\varphi)=\frac{f(\mu,\varphi)-f(\mu,\pi-\varphi)+f(\mu,-\varphi)-f(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{Y-,X-}(\mu,\varphi)=\frac{f(\mu,\varphi)-f(\mu,\pi-\theta)-f(\mu,-\theta)+f(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\frac{1}{\pi}\times\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+\partial_{n,0}}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda J_{2n}(\lambda\mu)C_{2n}^{Y+,X+}(\lambda)\frac{I_{2n}(\lambda\nu)}{I_{2n}(\lambda\nu_0)}Cos(2n\varphi)+\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda J_{2n+1}(\lambda\mu)C_{2n+1}^{Y+,X-}(\lambda)\frac{I_{2n+1}(\lambda\nu)}{I_{2n+1}(\lambda\nu_0)}Sin((2n+1)\varphi)+\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda J_{2n+1}(\lambda\mu)C_{2n+1}^{Y-,X+}(\lambda)\frac{I_{2n+1}(\lambda\nu)}{I_{2n+1}(\lambda\nu_0)}Cos((2n+1)\varphi)+\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda J_{2n+1}(\lambda\mu)C_{2n}^{Y-,X-}(\lambda)\frac{I_{2n}(\lambda\nu)}{I_{2n}(\lambda\nu_0)}Sin(2n\varphi)\end{array}\right\}$$

$$avec \quad \left\{\begin{array}{l}\displaystyle C_{2n}^{Y+,X+}(\lambda)=\int_0^{2\pi}d\varphi\,Cos(2n\varphi)\int_0^{+\infty}d\mu\,\mu J_{2n}(\lambda\mu)f_{Y+,X+}(\mu,\varphi)\\ \displaystyle C_{2n+1}^{Y+,X-}(\lambda)=\int_{2\pi}^{2\pi}d\varphi\,Sin((2n+1)\varphi)\int_0^{+\infty}d\mu\,\mu J_{2n+1}(\lambda\mu)f_{Y+,X-}(\mu,\varphi)\\ \displaystyle C_{2n+1}^{Y+,X-}(\lambda)=\int_0^{2\pi}d\varphi\,Cos((2n+1)\varphi)\int_0^{+\infty}d\mu\,\mu J_{2n+1}(\lambda\mu)f_{Y-,X+}(\mu,\varphi)\\ \displaystyle C_{2n}^{Y-,X-}(\lambda)=\int_0^{2\pi}d\varphi\,Sin(2n\varphi)\int_0^{+\infty}d\mu\,\mu J_{2n}(\lambda\mu)f_{Y-,X-}(\mu,\varphi)\end{array}\right.$$

.

Tandis que pour l'extérieur du domaine :

$$\Delta T(\mu,\nu,\varphi)=0 \quad (\mu,\nu,\varphi)\in[0,+\infty]\times[\nu_0,+\infty]\times[0,2\pi] \quad T(\mu,\nu,\varphi)\ fini \quad C.L. \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu,\varphi)$$

$$f(\mu,\varphi)=f_{Y+,X+}(\mu,\varphi)+f_{Y+,X-}(\mu,\varphi)+f_{Y-,X+}(\mu,\varphi)+f_{Y-,X-}(\mu,\varphi), \quad sachant\,que \quad f(\mu,\varphi)=f(\mu,2\pi+\varphi)$$

$$f_{Y+,X+}(\mu,\varphi)=\frac{f(\mu,\varphi)+f(\mu,\pi-\varphi)+f(\mu,-\varphi)+f(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{Y+,X-}(\mu,\varphi)=\frac{f(\mu,\varphi)+f(\mu,\pi-\varphi)-f(\mu,-\varphi)-f(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{Y-,X+}(\mu,\varphi)=\frac{f(\mu,\varphi)-f(\mu,\pi-\varphi)+f(\mu,-\varphi)-f(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{Y-,X-}(\mu,\varphi)=\frac{f(\mu,\varphi)-f(\mu,\pi-\theta)-f(\mu,-\theta)+f(\mu,\varphi-\pi)}{4}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\frac{1}{\pi}\times\left\{\begin{array}{l}
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+\partial_{n,0}}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda J_{2n}(\lambda\mu)C_{2n}^{Y+,X+}(\lambda)\frac{K_{2n}(\lambda\nu)}{K_{2n}(\lambda\nu_0)}Cos(2n\varphi)+\\
\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda J_{2n+1}(\lambda\mu)C_{2n+1}^{Y+,X-}(\lambda)\frac{K_{2n+1}(\lambda\nu)}{K_{2n+1}(\lambda\nu_0)}Sin((2n+1)\varphi)+\\
\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda J_{2n+1}(\lambda\mu)C_{2n+1}^{Y-,X+}(\lambda)\frac{K_{2n+1}(\lambda\nu)}{K_{2n+1}(\lambda\nu_0)}Cos((2n+1)\varphi)+\\
\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda J_{2n+1}(\lambda\mu)C_{2n}^{Y-,X-}(\lambda)\frac{K_{2n}(\lambda\nu)}{K_{2n}(\lambda\nu_0)}Sin(2n\varphi)
\end{array}\right\}$$

$$avec\quad\left\{\begin{array}{l}
C_{2n}^{Y+,X+}(\lambda)=\int_0^{2\pi}d\varphi\,Cos(2n\varphi)\int_0^{+\infty}d\mu\ \mu J_{2n}(\lambda\mu)f_{Y+,X+}(\mu,\varphi)\\
C_{2n+1}^{Y+,X-}(\lambda)=\int_{2\pi}^{2\pi}d\varphi\,Sin((2n+1)\varphi)\int_0^{+\infty}d\mu\ \mu J_{2n+1}(\lambda\mu)f_{Y+,X-}(\mu,\varphi)\\
C_{2n+1}^{Y+,X-}(\lambda)=\int_0^{2\pi}d\varphi\,Cos((2n+1)\varphi)\int_0^{+\infty}d\mu\ \mu J_{2n+1}(\lambda\mu)f_{Y-,X+}(\mu,\varphi)\\
C_{2n}^{Y-,X-}(\lambda)=\int_0^{2\pi}d\varphi\,Sin(2n\varphi)\int_0^{+\infty}d\mu\ \mu J_{2n}(\lambda\mu)f_{Y-,X-}(\mu,\varphi)
\end{array}\right.$$

.

Exemple pour une fonction limite sinusoïdale, sans même passer par la décomposition en symétrie, il vient pour le domaine intérieur :

$$\Delta T(\mu,\nu,\varphi)=0 \quad (\mu,\nu,\varphi)\in[0,+\infty]\times[0,\nu_0]\times[0,2\pi] \quad T(\mu,\nu,\varphi)\ fini \quad C.L. \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu,\varphi)$$

$$f(\mu,\varphi)=f_\mu(\mu)Cos(m\varphi)$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\frac{1}{\pi}\times\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+\partial_{n,0}}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda J_n(\lambda\mu)C_n(\lambda)\frac{I_n(\lambda\nu)}{I_n(\lambda\nu_0)}Cos(n\varphi)\right\}$$

$$avec \quad C_n(\lambda)=\int_0^{2\pi}d\varphi\,Cos(2n\varphi)\int_0^{+\infty}d\mu\ \mu J_n(\lambda\mu)f_\mu(\mu)Cos(m\varphi)=\pi\delta_{n,m}\int_0^{+\infty}d\mu\ \mu J_n(\lambda\mu)f_\mu(\mu)$$

$$C_n(\lambda)=\pi\delta_{n,m}C_{\mu,n}(\lambda) \quad avec \quad C_{\mu,n}(\lambda)=\int_0^{+\infty}d\mu\ \mu J_n(\lambda\mu)f_\mu(\mu)$$

$$\Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi)=\frac{1}{\pi}\times\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+\partial_{n,0}}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda J_n(\lambda\mu)\pi\delta_{n,m}C_{\mu,n}(\lambda)\frac{I_n(\lambda\nu)}{I_n(\lambda\nu_0)}Cos(n\varphi)\right\}$$

$$\Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\delta_{n,m}}{1+\partial_{n,0}}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda J_n(\lambda\mu)C_{\mu,n}(\lambda)\frac{I_n(\lambda\nu)}{I_n(\lambda\nu_0)}Cos(n\varphi)$$

$$\Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi)=\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda J_m(\lambda\mu)C_{\mu,m}(\lambda)\frac{I_m(\lambda\nu)}{I_m(\lambda\nu_0)}Cos(m\varphi)$$

$$Si\ f(\mu,\varphi)=f_\mu(\mu)Sin(m\varphi)\Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi)=\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda J_m(\lambda\mu)C_{\mu,m}(\lambda)\frac{I_m(\lambda\nu)}{I_m(\lambda\nu_0)}Sin(m\varphi)$$

.

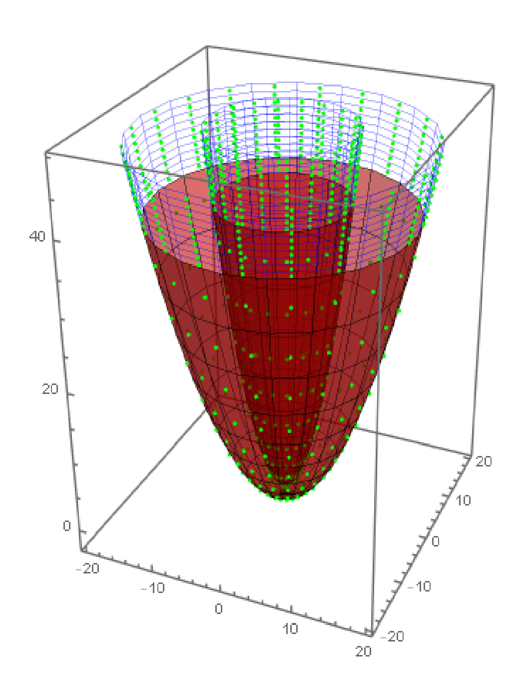
Exemple pour une fonction limite sinusoïdale, sans même passer par la décomposition en symétrie, il vient pour le domaine extérieur :

$$\Delta T(\mu,\nu,\varphi)=0 \quad (\mu,\nu,\varphi)\in[0,+\infty]\times[\nu_0,+\infty]\times[0,2\pi] \quad T(\mu,\nu,\varphi)\ fini \quad C.L. \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu,\varphi)$$

$$Si\ f(\mu,\varphi)=f_\mu(\mu)Cos(m\varphi)\Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi)=\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda J_m(\lambda\mu)C_{\mu,m}(\lambda)\frac{K_m(\lambda\nu)}{K_m(\lambda\nu_0)}Cos(m\varphi)$$

$$Si\ f(\mu,\varphi)=f_\mu(\mu)Sin(m\varphi)\Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi)=\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda J_m(\lambda\mu)C_{\mu,m}(\lambda)\frac{K_m(\lambda\nu)}{K_m(\lambda\nu_0)}Sin(m\varphi)$$

<u>Transformation intégrale: application aux problèmes aux limites intérieur de Dirichlet/Neumann sans dépendance azimutal domaine frontière entre deux paraboloïde de révolution complet µ€[0,∞], v€[v1, v2]</u>



Avec le théorème de Hankel, il devient possible de construire une représentation intégrale de la solution. D'abord sur le problème intérieur (problème convexe) :

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in[0,+\infty]\times[\nu_1,\nu_2] \quad T(\mu,\nu)\ fini \qquad C.L. \quad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_1}=f_1(\mu) \qquad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_2}=f_2(\mu)$$

sous la forme suivante :

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty} d\lambda\,\lambda \frac{J_0(\lambda\mu)}{I_0(\lambda\nu_2)K_0(\lambda\nu_1)-K_0(\lambda\nu_2)I_0(\lambda\nu_1)}\{C(\lambda)(I_0(\lambda\nu)K_0(\lambda\nu_1)-K_0(\lambda\nu)I_0(\lambda\nu_1))+D(\lambda)(K_0(\lambda\nu)I_0(\lambda\nu_2)-I_0(\lambda\nu)K_0(\lambda\nu_2))\}$$

$$avec \quad C(\lambda)=\int_0^{+\infty} d\mu\ \mu J_0(\lambda\mu)f_2(\mu) \quad et \qquad D(\lambda)=\int_0^{+\infty} d\mu\ \mu J_0(\lambda\mu)f_1(\mu)$$

Prenons une fonction limite en palier de la forme : $f_1(\mu)=f_2(\mu)=\begin{cases} T_0 & \nu\in[0,\mu_0] \\ 0 & \nu\in[\mu_0,+\infty] \end{cases}$

La solution s'écrit :

$$C(\lambda)=D(\lambda)=\frac{\mu_0 T_0 J_1(\lambda\mu_0)}{\lambda}$$

$$\Rightarrow T(\mu,\nu)=\mu_0 T_0\int_0^{+\infty} d\lambda \frac{J_0(\lambda\mu)J_1(\lambda\mu_0)\{I_0(\lambda\nu)(K_0(\lambda\nu_1)-K_0(\lambda\nu_2))-K_0(\lambda\nu)(I_0(\lambda\nu_1)-I_0(\lambda\nu_2))\}}{I_0(\lambda\nu_2)K_0(\lambda\nu_1)-K_0(\lambda\nu_2)I_0(\lambda\nu_1)}$$

Considérons le problème avec une condition de Neumann inhomogène imposée sur la surface intérieur et de Dirichlet homogène à l'extérieur, soit :

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in[0,+\infty]\times[\nu_1,\nu_2] \quad T(\mu,\nu)\ fini \qquad C.L. \quad \frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu_1{}^2}}\left.\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}\right|_{\nu=\nu_1}=-f_1(\mu) \qquad T(\mu,\nu)|_{\nu=\nu_2}=f_2(\mu)$$

On choisira alors une solution de la forme :

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda J_0(\lambda\mu)\left\{C(\lambda)\frac{I_0(\lambda\nu)K_0(\lambda\nu_1)-K_0(\lambda\nu)I_0(\lambda\nu_1)}{I_0(\lambda\nu_2)K_0(\lambda\nu_1)-K_0(\lambda\nu_2)I_0(\lambda\nu_1)}+D(\lambda)\frac{K_0(\lambda\nu)I_0(\lambda\nu_2)-I_0(\lambda\nu)K_0(\lambda\nu_2)}{K_1(\lambda\nu_1)I_0(\lambda\nu_2)+I_1(\lambda\nu_1)K_0(\lambda\nu_2)}\right\}$$

$$avec \quad C(\lambda)=\int_0^{+\infty}d\mu\ \mu J_0(\lambda\mu)f_2(\mu)$$

$$Pour\ la\ partie \quad \int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda J_0(\lambda\mu)D(\lambda)\frac{K_0(\lambda\nu)I_0(\lambda\nu_2)-I_0(\lambda\nu)K_0(\lambda\nu_2)}{K_1(\lambda\nu_1)I_0(\lambda\nu_2)+I_1(\lambda\nu_1)K_0(\lambda\nu_2)}$$

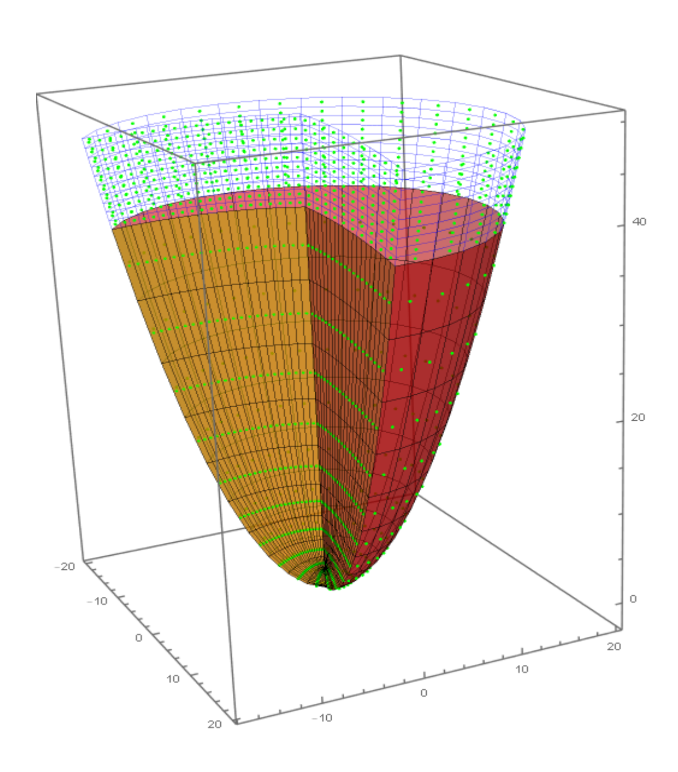
$$Si \quad \left.\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}\right|_{\nu=\nu_1}=-\sqrt{\mu^2+\nu_1{}^2}\,f_1(\mu)\Rightarrow\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda^2J_0(\lambda\mu)D(\lambda)=\sqrt{\mu^2+\nu_1{}^2}\,f_1(\mu)\Rightarrow D(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}d\mu\ \mu J_0(\lambda\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_1{}^2}\,f_1(\mu)$$

Soit en simplifiant autant que faire se peut l'expression :

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty}d\lambda\,J_0(\lambda\mu)\left\{\lambda C(\lambda)\frac{I_0(\lambda\nu)K_0(\lambda\nu_1)-K_0(\lambda\nu)I_0(\lambda\nu_1)}{I_0(\lambda\nu_2)K_0(\lambda\nu_1)-K_0(\lambda\nu_2)I_0(\lambda\nu_1)}+D(\lambda)\frac{K_0(\lambda\nu)I_0(\lambda\nu_2)-I_0(\lambda\nu)K_0(\lambda\nu_2)}{K_1(\lambda\nu_1)I_0(\lambda\nu_2)+I_1(\lambda\nu_1)K_0(\lambda\nu_2)}\right\}$$

$$avec \quad C(\lambda)=\int_0^{+\infty}d\mu\ \mu J_0(\lambda\mu)f_2(\mu) \qquad et \qquad D(\lambda)=\int_0^{+\infty}d\mu\ \mu J_0(\lambda\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_1{}^2}\,f_1(\mu)$$

Transformation intégrale: application aux problèmes aux limites Dirichlet homogène azimutal, inhomogène en v intérieur et extérieur de Dirichlet ou Neumann avec dépendance azimutal sur un secteur d'angle azimutale



Le problème aux limites purement de Dirichlet a la forme suivante :

$$\Delta T(\mu,\nu,\varphi)=0 \quad (\mu,\nu,\varphi)\in[0,+\infty]\times[0,\nu_0]\times[0,\varphi_0] \quad T(\mu,\nu,\varphi)\ fini$$

$$C.L. \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu,\varphi) \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=0}=T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_0}=0$$

Cette fois-ci le développement de la solution se fait tant en intégrale qu'en série, sous la forme :

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} d\lambda\,\lambda J_n(\lambda\mu)\left(C_n(\lambda)\,I_n(\lambda\nu)+D_n(\lambda)K_n(\lambda\nu)\right)Sin\left(\frac{n\pi}{\varphi_0}\varphi\right)$$

Plus particulièrement sur un domaine intérieur, il viendrait avec le théorème de Hankel :

$$(\mu,\nu,\varphi)\in[0,+\infty]\times[0,\nu_0]\times[0,\varphi_0] \quad \tau_n=\frac{n\pi}{\varphi_0}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} d\lambda\,\lambda J_{\tau_n}(\lambda\mu)C_n(\lambda)\frac{I_{\tau_n}(\lambda\nu)}{I_{\tau_n}(\lambda\nu_0)}Sin(\tau_n\varphi) \quad avec \quad C_n(\lambda)=\int_0^{\varphi_0} d\varphi\,Sin(\tau_n\varphi)\int_0^{+\infty} d\mu\,\mu J_{\tau_n}(\lambda\mu)f(\mu,\varphi)$$

Tandis que pour l'extérieur du domaine ***:***

$$(\mu,\nu,\varphi)\in[0,+\infty]\times[\nu_0,+\infty]\times[0,\varphi_0] \quad \tau_n=\frac{n\pi}{\varphi_0}$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} d\lambda\,\lambda J_{\tau_n}(\lambda\mu)C_n(\lambda)\frac{K_{\tau_n}(\lambda\nu)}{K_{\tau_n}(\lambda\nu_0)}Sin(\tau_n\varphi) \quad avec \quad C_n(\lambda)=\int_0^{\varphi_0} d\varphi\,Sin(\tau_n\varphi)\int_0^{+\infty} d\mu\,\mu J_{\tau_n}(\lambda\mu)f(\mu,\varphi)$$

Pour le problème aux limites homogène de Dirichlet et inhomogène de Neumann, il vient avec le théorème de Hankel sur le domaine intérieur :

$$(\mu,\nu,\varphi)\in[0,+\infty]\times[0,\nu_0]\times[0,\varphi_0] \qquad \tau_n=\frac{n\pi}{\varphi_0}$$

$$C.L. \quad \left.\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}\right|_{\nu=\nu_0}=\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\ 2}}\,f(\mu,\varphi) \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=0}=T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_0}=0$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{\lambda\nu_0 I_{\tau_n}(\lambda\nu)J_{\tau_n}(\lambda\mu)C_n(\lambda)Sin(\tau_n\varphi)}{\tau_n I_{\tau_n}(\lambda\nu_0)+\lambda\nu_0 I_{\tau_n+1}(\lambda\nu_0)} \quad C_n(\lambda)=\int_0^{\varphi_0}d\varphi\,Sin(\tau_n\varphi)\int_0^{+\infty}d\mu\;\mu J_{\tau_n}(\lambda\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\ 2}}\,f(\mu,\varphi)$$

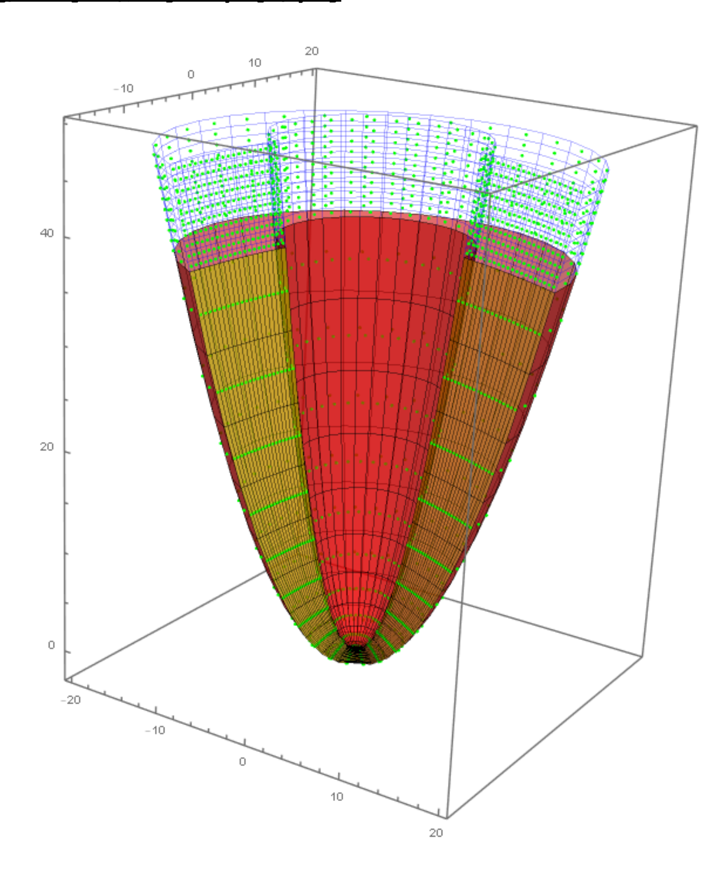
Tandis que pour pour le problème aux limites homogène de Dirichlet et inhomogène de Neumann, sur l'extérieur du domaine, il vient :

$$(\mu,\nu,\varphi)\in[0,+\infty]\times[\nu_0,+\infty]\times[0,\varphi_0] \qquad \tau_n=\frac{n\pi}{\varphi_0}$$

$$C.L. \quad \left.\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\nu}\right|_{\nu=\nu_0}=-\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\ 2}}\,f(\mu,\varphi) \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=0}=T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_0}=0$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{\lambda\nu_0 K_{\tau_n}(\lambda\nu)J_{\tau_n}(\lambda\mu)C_n(\lambda)Sin(\tau_n\varphi)}{\lambda\nu_0 K_{\tau_n+1}(\lambda\nu_0)-\tau_n K_{\tau_n}(\lambda\nu_0)} \quad C_n(\lambda)=\int_0^{\varphi_0}d\varphi\,Sin(\tau_n\varphi)\int_0^{+\infty}d\mu\;\mu J_{\tau_n}(\lambda\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\ 2}}\,f(\mu,\varphi)$$

<u>Transformation intégrale: application aux problèmes aux limites Dirichlet homogène azimutal, inhomogène en v intérieur de Dirichlet avec dépendance azimutal sur un secteur d'angle azimutale, μ € [0,+∞], v € [v1, v2] et φ€[0,φ0]</u>



Le problème aux limites purement de Dirichlet a la forme suivante :

$$\Delta T(\mu,\nu,\varphi)=0 \quad (\mu,\nu,\varphi)\in[0,+\infty]\times[\nu_1,\nu_2]\times[0,\varphi_0] \quad T(\mu,\nu,\varphi)\ fini$$
$$C.L.\quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_1}=f_1(\mu,\varphi)\quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_2}=f_2(\mu,\varphi)\quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=0}=T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_0}=0$$

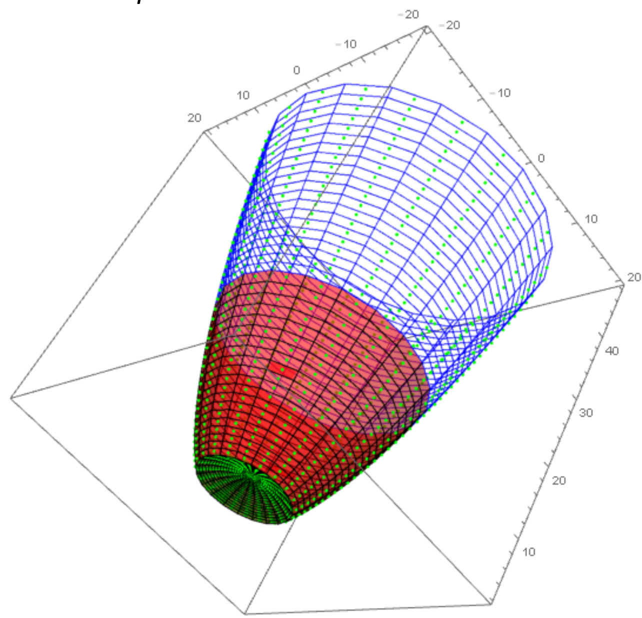
Cette fois-ci le développement de la solution se fait tant en intégrale qu'en série, avec la solution sous la forme :

$$\tau_n=\frac{n\pi}{\varphi_0}\quad et\quad C_n(\lambda)=\int_0^{\varphi_0}d\varphi\,Sin(\tau_n\varphi)\int_0^{+\infty}d\mu\;\mu J_{\tau_n}(\lambda\mu)f_1(\mu,\varphi)\quad et\quad D_n(\lambda)=\int_0^{\varphi_0}d\varphi\,Sin(\tau_n\varphi)\int_0^{+\infty}d\mu\;\mu J_{\tau_n}(\lambda\mu)f_2(\mu,\varphi)$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda J_{\tau_n}(\lambda\mu)\left(C_n(\lambda)\frac{I_n(\lambda\nu)K_n(\lambda\nu_2)-I_n(\lambda\nu_2)K_n(\lambda\nu)}{I_n(\lambda\nu_1)K_n(\lambda\nu_2)-I_n(\lambda\nu_2)K_n(\lambda\nu_1)}+D_n(\lambda)\frac{I_n(\lambda\nu_1)K_n(\lambda\nu)-I_n(\lambda\nu)K_n(\lambda\nu_1)}{I_n(\lambda\nu_1)K_n(\lambda\nu_2)-I_n(\lambda\nu_2)K_n(\lambda\nu_1)}\right)Sin\left(\frac{n\pi}{\varphi_0}\varphi\right)$$

<u>Transformation intégrale: application aux problèmes aux limites intérieur/extérieur de Dirichlet/Neumann inhomogène en v, Dirichlet homogène en µ sans dépendance azimutal domaine frontière d'un paraboloïde de révolution tronqué µ€[µ$_0$,∞], v€[0, v$_0$]</u>

Un paraboloïde de révolution tronqué :



.

Avec le théorème de Hankel et sa partie sur la transformation de Weber/Dirichlet, il devient possible de construire une représentation intégrale de la solution. D'abord sur le problème intérieur de Dirichlet :

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in[\mu_0,+\infty]\times[0,\nu_0] \quad T(\mu,\nu)\ fini \quad C.L. \quad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu) \qquad T(\mu,\nu)\big|_{\mu=\mu_0}=0$$

sous la forme suivante :

$$\Psi_0(\lambda\mu)=J_0(\lambda\mu)Y_0(\lambda\mu_0)-Y_0(\lambda\mu)J_0(\lambda\mu_0)$$

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty} d\lambda \frac{\lambda\, C(\lambda)}{(J_0(\lambda\mu_0))^2+(Y_0(\lambda\mu_0))^2}\Psi_0(\lambda\mu)\frac{I_0(\lambda\nu)}{I_0(\lambda\nu_0)} \qquad avec \quad C(\lambda)=\int_{\mu_0}^{+\infty} d\mu\ \mu\Psi_0(\lambda\mu)f(\mu)$$

Tandis que pour l'extérieur du domaine <u>:</u>

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in[\mu_0,+\infty]\times[\nu_0,+\infty] \quad T(\mu,\nu)\ fini \quad C.L. \quad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu) \quad T(\mu,\nu)\big|_{\mu=\mu_0}=0 .$$

sous la forme suivante :

$$\Psi_0(\lambda\mu)=J_0(\lambda\mu)Y_0(\lambda\mu_0)-Y_0(\lambda\mu)J_0(\lambda\mu_0)$$

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty} d\lambda \frac{\lambda\, C(\lambda)}{(J_0(\lambda\mu_0))^2+(Y_0(\lambda\mu_0))^2}\Psi_0(\lambda\mu)\frac{K_0(\lambda\nu)}{K_0(\lambda\nu_0)} \qquad avec \quad C(\lambda)=\int_{\mu_0}^{+\infty} d\mu\ \mu\Psi_0(\lambda\mu)f(\mu) .$$

Un problème intérieur de Neumann donnerait :

$$\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=\nu_0}=\sqrt{\mu^2+{\nu_0}^2}\,f(\mu) \quad T(\mu,\nu)\big|_{\mu=\mu_0}=0 \quad \Psi_0(\lambda\mu)=J_0(\lambda\mu)Y_0(\lambda\mu_0)-Y_0(\lambda\mu)J_0(\lambda\mu_0)$$

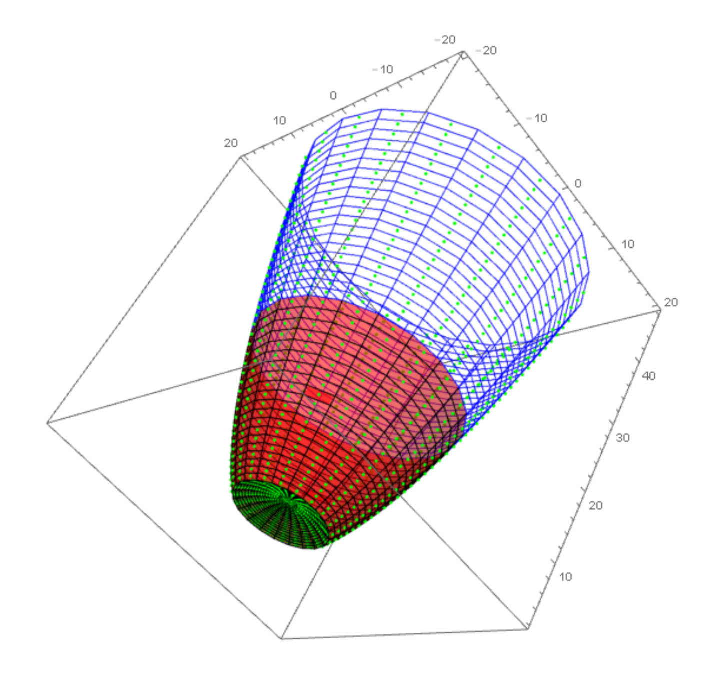
$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty} d\lambda \frac{C(\lambda)}{(J_0(\lambda\mu_0))^2+(Y_0(\lambda\mu_0))^2}\Psi_0(\lambda\mu)\frac{I_0(\lambda\nu)}{I_1(\lambda\nu_0)} \quad avec \quad C(\lambda)=\int_{\mu_0}^{+\infty} d\mu\ \mu\Psi_0(\lambda\mu)\sqrt{\mu^2+{\nu_0}^2}\,f(\mu)$$

Un problème extérieur de Neumann donnerait :

$$\left.\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial \nu}\right|_{\nu=\nu_0} = -\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\,2}}\,f(\mu) \quad T(\mu,\nu)\big|_{\mu=\mu_0}=0 \quad \Psi_0(\lambda\mu)=J_0(\lambda\mu)Y_0(\lambda\mu_0)-Y_0(\lambda\mu)J_0(\lambda\mu_0)$$

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty} d\lambda \frac{C(\lambda)}{(J_0(\lambda\mu_0))^2+(Y_0(\lambda\mu_0))^2}\Psi_0(\lambda\mu)\frac{K_0(\lambda\nu)}{K_1(\lambda\nu_0)} \quad avec \quad C(\lambda)=\int_{\mu_0}^{+\infty} d\mu\, \mu\Psi_0(\lambda\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\,2}}\,f(\mu)$$

Transformation intégrale: application aux problèmes aux limites intérieur/extérieur de Dirichlet/Neumann inhomogène en ν, Neumann homogène en μ sans dépendance azimutal domaine frontière d'un paraboloïde de révolution tronqué μ€[μ₀,∞], ν€[0, ν₀]



Toujours sur le même paraboloïde de révolution tronqué, les problèmes aux limites se présentent comme suit :

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in\left\{\begin{matrix}[\mu_0,+\infty]\times[0,\nu_0] \\ ou \quad [\mu_0,+\infty]\times[\nu_0,+\infty]\end{matrix}\right\} \quad T(\mu,\nu)\ fini$$

$$C.L. \quad \left\{\begin{matrix} T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu) \\ ou \quad \dfrac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\,2}}}\left.\dfrac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}\right|_{\nu=\nu_0}=\pm f(\mu)\end{matrix}\right\} \quad \left.\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=\mu_0}=0$$

Avec le théorème de Hankel et sa partie sur la transformation de Weber/Neumann, il devient possible de construire une représentation intégrale de la solution. D'abord sur le problème intérieur de Dirichlet :

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in[\mu_0,+\infty]\times[0,\nu_0] \quad T(\mu,\nu)\ fini \quad C.L. \quad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu) \qquad \left.\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=\mu_0}=0$$

sous la forme suivante :

$$\Psi_0(\lambda\mu)=J_0(\lambda\mu)Y_0{}'(\lambda\mu_0)-Y_0(\lambda\mu)J_0{}'(\lambda\mu_0)=Y_0(\lambda\mu)J_1(\lambda\mu_0)-J_0(\lambda\mu)Y_1(\lambda\mu_0)$$

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty} d\lambda \frac{\lambda\, C(\lambda)}{(J_1(\lambda\mu_0))^2+(Y_1(\lambda\mu_0))^2}\Psi_0(\lambda\mu)\frac{I_0(\lambda\nu)}{I_0(\lambda\nu_0)} \qquad avec \quad C(\lambda)=\int_{\mu_0}^{+\infty} d\mu\, \mu\Psi_0(\lambda\mu)f(\mu)$$

Tandis que pour l'extérieur du domaine ***:***

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in[\mu_0,+\infty]\times[\nu_0,+\infty] \quad T(\mu,\nu)\ fini \quad C.L. \quad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu) \quad \left.\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=\mu_0}=0 .$$

sous la forme suivante :

$$\Psi_0(\lambda\mu)=J_0(\lambda\mu)Y_0'(\lambda\mu_0)-Y_0(\lambda\mu)J_0'(\lambda\mu_0)=Y_0(\lambda\mu)J_1(\lambda\mu_0)-J_0(\lambda\mu)Y_1(\lambda\mu_0)$$

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{\lambda\,C(\lambda)}{(J_1(\lambda\mu_0))^2+(Y_1(\lambda\mu_0))^2}\Psi_0(\lambda\mu)\frac{K_0(\lambda\nu)}{K_0(\lambda\nu_0)} \qquad avec \quad C(\lambda)=\int_{\mu_0}^{+\infty}d\mu\ \mu\Psi_0(\lambda\mu)f(\mu)$$

Un problème intérieur de Neumann donnerait :

$$\left.\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}\right|_{\nu=\nu_0}=\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\ 2}}\,f(\mu) \quad \left.\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=\mu_0}=0 \quad \Psi_0(\lambda\mu)=Y_0(\lambda\mu)J_1(\lambda\mu_0)-J_0(\lambda\mu)Y_1(\lambda\mu_0)$$

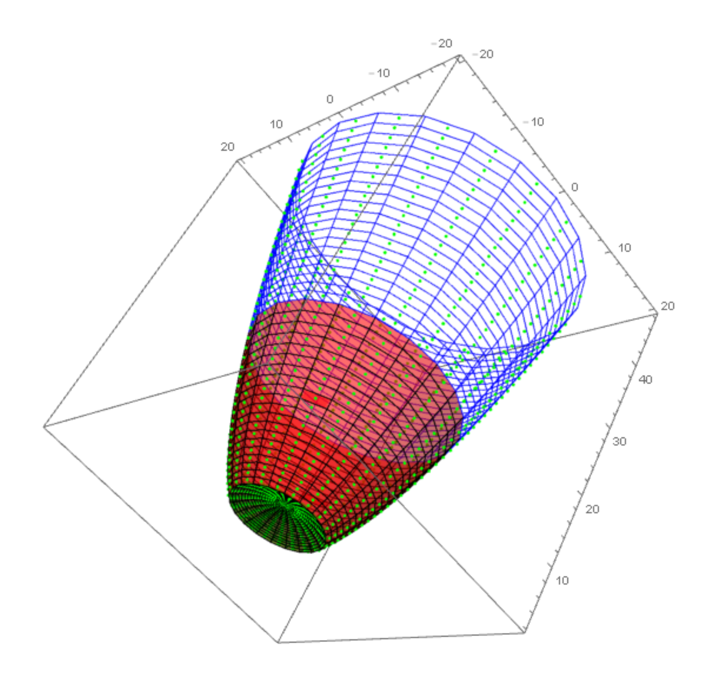
$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{C(\lambda)}{(J_1(\lambda\mu_0))^2+(Y_1(\lambda\mu_0))^2}\Psi_0(\lambda\mu)\frac{I_0(\lambda\nu)}{I_1(\lambda\nu_0)} \quad avec \quad C(\lambda)=\int_{\mu_0}^{+\infty}d\mu\ \mu\Psi_0(\lambda\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\ 2}}\,f(\mu)$$

Un problème extérieur de Neumann donnerait :

$$\left.\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}\right|_{\nu=\nu_0}=-\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\ 2}}\,f(\mu) \quad T(\mu,\nu)\big|_{\mu=\mu_0}=0 \quad \Psi_0(\lambda\mu)=Y_0(\lambda\mu)J_1(\lambda\mu_0)-J_0(\lambda\mu)Y_1(\lambda\mu_0)$$

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{C(\lambda)}{(J_1(\lambda\mu_0))^2+(Y_1(\lambda\mu_0))^2}\Psi_0(\lambda\mu)\frac{K_0(\lambda\nu)}{K_1(\lambda\nu_0)} \quad avec \quad C(\lambda)=\int_{\mu_0}^{+\infty}d\mu\ \mu\Psi_0(\lambda\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\ 2}}\,f(\mu)$$

<u>Transformation intégrale: application aux problèmes aux limites intérieur/extérieur de Dirichlet/Neumann inhomogène en ν, Robin homogène en μ sans dépendance azimutal domaine frontière d'un paraboloïde de révolution tronqué μ€[μ0,∞], ν€[0, ν0]</u>



Toujours sur le même paraboloïde de révolution tronqué, les problèmes aux limites se présentent comme suit :

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in\left\{\begin{matrix}[\mu_0,+\infty]\times[0,\nu_0]\\ ou \quad [\mu_0,+\infty]\times[\nu_0,+\infty]\end{matrix}\right\} \quad T(\mu,\nu)\ fini$$

$$C.L. \quad \left\{\begin{matrix} T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu) \\ ou \quad \frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu_0^2}}\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}\bigg|_{\nu=\nu_0}=\pm f(\mu)\end{matrix}\right\} \qquad \alpha\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\beta T(\mu,\nu)\bigg|_{\mu=\mu_0}=0$$

Avec le théorème de Hankel et sa partie sur la transformation de Weber/Robin, il devient possible de construire une représentation intégrale de la solution. D'abord sur le problème intérieur de Dirichlet :

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in[\mu_0,+\infty]\times[0,\nu_0] \quad T(\mu,\nu)\ fini \quad C.L. \quad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu)$$

$$\alpha\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\beta T(\mu,\nu)\bigg|_{\mu=\mu_0}=0$$

sous la forme suivante :

$$\Psi_0(\lambda\mu)=J_0(\lambda\mu)\{\beta Y_0(\lambda\mu_0)-\alpha\lambda Y_1(\lambda\mu_0)\}-Y_0(\lambda\mu)\{\beta J_0(\lambda\mu_0)-\alpha\lambda J_1(\lambda\mu_0)\}$$

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty}d\lambda\frac{\lambda C(\lambda)}{\{\beta J_0(\lambda\mu_0)-\alpha\lambda J_1(\lambda\mu_0)\}^2+\{\beta Y_0(\lambda\mu_0)-\alpha\lambda Y_1(\lambda\mu_0)\}^2}\Psi_0(\lambda\mu)\frac{I_0(\lambda\nu)}{I_0(\lambda\nu_0)}$$

$$avec \quad C(\lambda)=\int_{\mu_0}^{+\infty}d\mu\ \mu\Psi_0(\lambda\mu)f(\mu)$$

Tandis que pour l'extérieur du domaine ***:***

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in[\mu_0,+\infty]\times[\nu_0,+\infty] \quad T(\mu,\nu)\ fini \quad C.L. \quad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu)$$

$$\alpha\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\beta\,T(\mu,\nu)\Bigg|_{\mu=\mu_0}=0$$

sous la forme suivante :

$$\Psi_0(\lambda\mu)=J_0(\lambda\mu)\{\beta\,Y_0(\lambda\mu_0)-\alpha\lambda\,Y_1(\lambda\mu_0)\}-Y_0(\lambda\mu)\{\beta\,J_0(\lambda\mu_0)-\alpha\lambda\,J_1(\lambda\mu_0)\}$$

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{\lambda\,C(\lambda)}{\{\beta\,J_0(\lambda\mu_0)-\alpha\lambda\,J_1(\lambda\mu_0)\}^2+\{\beta\,Y_0(\lambda\mu_0)-\alpha\lambda\,Y_1(\lambda\mu_0)\}^2}\,\Psi_0(\lambda\mu)\,\frac{K_0(\lambda\nu)}{K_0(\lambda\nu_0)}$$

$$avec \quad C(\lambda)=\int_{\mu_0}^{+\infty}d\mu\ \mu\Psi_0(\lambda\mu)f(\mu)$$

Un problème intérieur de Neumann donnerait :

$$\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}\Bigg|_{\nu=\nu_0}=\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\ 2}}\,f(\mu) \quad \alpha\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\beta\,T(\mu,\nu)\Bigg|_{\mu=\mu_0}=0$$

$$\Psi_0(\lambda\mu)=J_0(\lambda\mu)\{\beta\,Y_0(\lambda\mu_0)-\alpha\lambda\,Y_1(\lambda\mu_0)\}-Y_0(\lambda\mu)\{\beta\,J_0(\lambda\mu_0)-\alpha\lambda\,J_1(\lambda\mu_0)\}$$

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{C(\lambda)\Psi_0(\lambda\mu)}{\{\beta\,J_0(\lambda\mu_0)-\alpha\lambda\,J_1(\lambda\mu_0)\}^2+\{\beta\,Y_0(\lambda\mu_0)-\alpha\lambda\,Y_1(\lambda\mu_0)\}^2}\,\frac{I_0(\lambda\nu)}{I_1(\lambda\nu_0)}$$

$$avec \quad C(\lambda)=\int_{\mu_0}^{+\infty}d\mu\ \mu\Psi_0(\lambda\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\ 2}}\,f(\mu)$$

Un problème extérieur de Neumann donnerait :

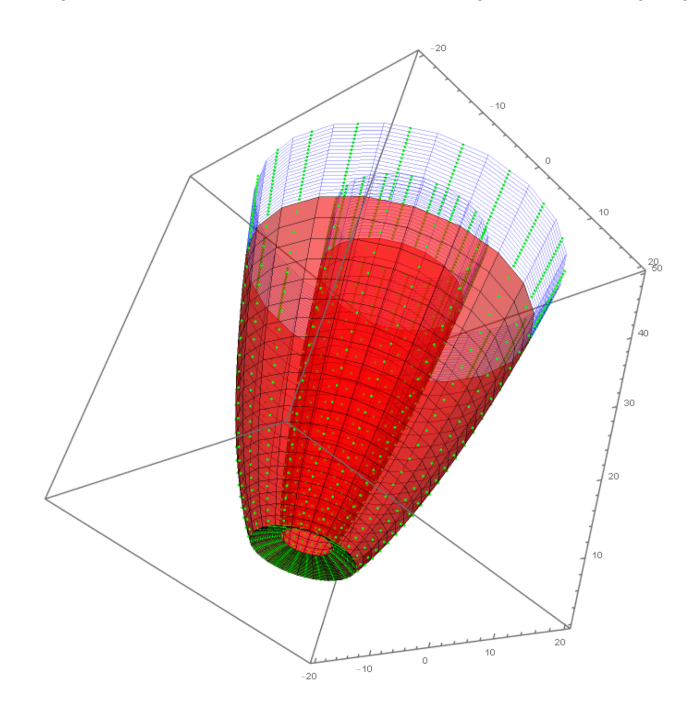
$$\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}\Bigg|_{\nu=\nu_0}=-\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\ 2}}\,f(\mu) \qquad \alpha\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\beta\,T(\mu,\nu)\Bigg|_{\mu=\mu_0}=0$$

$$\Psi_0(\lambda\mu)=J_0(\lambda\mu)\{\beta\,Y_0(\lambda\mu_0)-\alpha\lambda\,Y_1(\lambda\mu_0)\}-Y_0(\lambda\mu)\{\beta\,J_0(\lambda\mu_0)-\alpha\lambda\,J_1(\lambda\mu_0)\}$$

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{C(\lambda)\Psi_0(\lambda\mu)}{\{\beta\,J_0(\lambda\mu_0)-\alpha\lambda\,J_1(\lambda\mu_0)\}^2+\{\beta\,Y_0(\lambda\mu_0)-\alpha\lambda\,Y_1(\lambda\mu_0)\}^2}\,\frac{K_0(\lambda\nu)}{K_1(\lambda\nu_0)}$$

$$avec \quad C(\lambda)=\int_{\mu_0}^{+\infty}d\mu\ \mu\Psi_0(\lambda\mu)\sqrt{\mu^2+\nu_0^{\ 2}}\,f(\mu)$$

Transformation intégrale: application aux problèmes aux limites intérieur/extérieur de Dirichlet/Neumann inhomogène en ν, Robin homogène en μ sans dépendance azimutal domaine intérieur de frontière d'un paraboloïde de révolution tronqué et creux μ€[μ₀,∞], ν€[ν₁, ν₂]



Sur un paraboloïde de révolution tronqué et creux , le problème aux limites se présentent comme suit :

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in\begin{Bmatrix}[\mu_0,+\infty]\times[\nu_1,\nu_2] \\ ou \quad [\mu_0,+\infty]\times[\nu_1,\nu_2]\end{Bmatrix} \quad T(\mu,\nu)\ fini$$

$$C.L. \quad \begin{cases} T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_1}=f_1(\mu) \\ ou \quad \dfrac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu_1^2}}\dfrac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}\bigg|_{\nu=\nu_1}=-f_1(\mu)\end{cases} \qquad \begin{cases} T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_2}=f_2(\mu) \\ ou \quad \dfrac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu_2^2}}\dfrac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\nu}\bigg|_{\nu=\nu_2}=f_2(\mu)\end{cases}$$

$$\alpha\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\beta T(\mu,\nu)\bigg|_{\mu=\mu_0}=0 \qquad \alpha=1-\beta\in\{0,1\}$$

Avec le théorème de Hankel et sa partie sur la transformation de Weber/Robin, il devient possible de construire une représentation intégrale de la solution. D'abord sur le problème intérieur de Dirichlet :

$$\Delta T(\mu,\nu)=0 \quad (\mu,\nu)\in[\mu_0,+\infty]\times[0,\nu_0] \quad T(\mu,\nu)\ fini \quad C.L. \quad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_1}=f_1(\mu) \quad T(\mu,\nu)\big|_{\nu=\nu_2}=f_2(\mu)$$

$$\alpha\frac{\partial T(\mu,\nu)}{\partial\mu}+\beta T(\mu,\nu)\bigg|_{\mu=\mu_0}=0$$

sous la forme suivante :

$$\Psi_0(\lambda\mu)=J_0(\lambda\mu)\{\beta Y_0(\lambda\mu_0)-\alpha\lambda Y_1(\lambda\mu_0)\}-Y_0(\lambda\mu)\{\beta J_0(\lambda\mu_0)-\alpha\lambda J_1(\lambda\mu_0)\}$$

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{+\infty}d\lambda\frac{\lambda\Psi_0(\lambda\mu)\{C(\lambda)(I_0(\lambda\nu)K_0(\lambda\nu_1)-K_0(\lambda\nu)I_0(\lambda\nu_1))+D(\lambda)(K_0(\lambda\nu)I_0(\lambda\nu_2)-I_0(\lambda\nu)K_0(\lambda\nu_2))\}}{(\{\beta J_0(\lambda\mu_0)-\alpha\lambda J_1(\lambda\mu_0)\}^2+\{\beta Y_0(\lambda\mu_0)-\alpha\lambda Y_1(\lambda\mu_0)\}^2)(I_0(\lambda\nu_2)K_0(\lambda\nu_1)-K_0(\lambda\nu_2)I_0(\lambda\nu_1))}$$

$$avec \quad C(\lambda)=\int_{\mu_0}^{+\infty}d\mu\ \mu\ \Psi_0(\lambda\mu)f_2(\mu) \qquad et \qquad D(\lambda)=\int_0^{+\infty}d\mu\ \mu\ \Psi_0(\lambda\mu)f_1(\mu)$$

On retrouve une transformation de Weber-Dirichlet pour le cas α=1-β=0 :

$$\Psi_0(\lambda\mu) = J_0(\lambda\mu)Y_0(\lambda\mu_0) - Y_0(\lambda\mu)J_0(\lambda\mu_0)$$

$$T(\mu,\nu) = \int_0^{+\infty} d\lambda \frac{\lambda\,\Psi_0(\lambda\mu)\{C(\lambda)(I_0(\lambda\nu)K_0(\lambda\nu_1) - K_0(\lambda\nu)I_0(\lambda\nu_1)) + D(\lambda)(K_0(\lambda\nu)I_0(\lambda\nu_2) - I_0(\lambda\nu)K_0(\lambda\nu_2))\}}{(\{J_0(\lambda\mu_0)\}^2 + \{Y_0(\lambda\mu_0)\}^2)(I_0(\lambda\nu_2)K_0(\lambda\nu_1) - K_0(\lambda\nu_2)I_0(\lambda\nu_1))}$$

$$avec \quad C(\lambda) = \int_{\mu_0}^{+\infty} d\mu\ \mu\ \Psi_0(\lambda\mu) f_2(\mu) \qquad et \qquad D(\lambda) = \int_0^{+\infty} d\mu\ \mu\ \Psi_0(\lambda\mu) f_1(\mu)$$

On retrouve une transformation de Weber-Neumann pour le cas α=1-β=1:

$$\Psi_0(\lambda\mu) = -\lambda(J_0(\lambda\mu)Y_1(\lambda\mu_0) - Y_0(\lambda\mu)J_1(\lambda\mu_0))$$

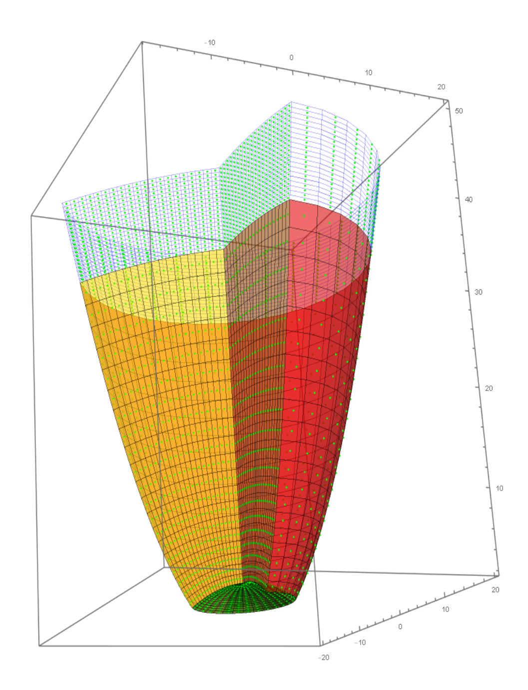
$$\Rightarrow \widetilde{\Psi}_0(\lambda\mu) = J_0(\lambda\mu)Y_1(\lambda\mu_0) - Y_0(\lambda\mu)J_1(\lambda\mu_0)$$

$$T(\mu,\nu) = \int_0^{+\infty} d\lambda \frac{\widetilde{\Psi}_0(\lambda\mu)\{C(\lambda)(I_0(\lambda\nu)K_0(\lambda\nu_1) - K_0(\lambda\nu)I_0(\lambda\nu_1)) + D(\lambda)(K_0(\lambda\nu)I_0(\lambda\nu_2) - I_0(\lambda\nu)K_0(\lambda\nu_2))\}}{(\{J_1(\lambda\mu_0)\}^2 + \{Y_1(\lambda\mu_0)\}^2)(I_0(\lambda\nu_2)K_0(\lambda\nu_1) - K_0(\lambda\nu_2)I_0(\lambda\nu_1))}$$

$$avec \quad C(\lambda) = \int_{\mu_0}^{+\infty} d\mu\ \mu\ \widetilde{\Psi}_0(\lambda\mu) f_2(\mu) \qquad et \qquad D(\lambda) = \int_0^{+\infty} d\mu\ \mu\ \widetilde{\Psi}_0(\lambda\mu) f_1(\mu)$$

Transformation intégrale: application aux problèmes aux limites intérieur de Dirichlet inhomogène en ν, Dirichlet homogène en μ et en φ du domaine frontière d'un secteur azimutal de paraboloïde de révolution tronqué μ€[μ_0,∞], ν€[0, ν_0], φ€[0, φ_0]

Un secteur de paraboloïde de révolution tronqué plein :



Avec le théorème de Hankel et sa partie sur la transformation de Weber/Dirichlet, il devient possible de construire une série de représentations intégrales de la solution de ce problème intérieur :

$$\Delta T(\mu,\nu,\varphi)=0 \quad (\mu,\nu,\varphi)\in[\mu_0,+\infty]\times[0,\nu_0]\times[0,\varphi_0] \quad T(\mu,\nu,\varphi)\ fini$$

$$C.L. \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_0}=f(\mu) \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\mu=\mu_0}=0 \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=0}=0 \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_0}=0$$

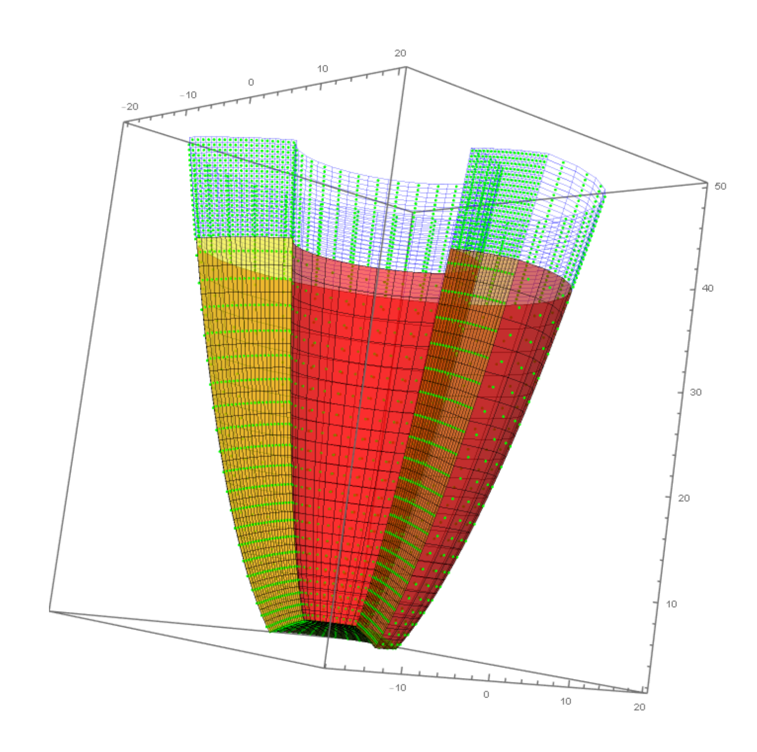
sous la forme suivante :

$$\tau_n=\frac{n\pi}{\varphi_0} \quad \Psi_{\tau_n}(\lambda\mu)=J_{\tau_n}(\lambda\mu)Y_{\tau_n}(\lambda\mu_0)-Y_{\tau_n}(\lambda\mu)J_{\tau_n}(\lambda\mu_0)$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=1}^{n=+\infty}\int_0^{+\infty}d\lambda\frac{\lambda\,C_n(\lambda)}{\left(J_{\tau_n}(\lambda\mu_0)\right)^2+\left(Y_{\tau_n}(\lambda\mu_0)\right)^2}\Psi_{\tau_n}(\lambda\mu)\frac{I_{\tau_n}(\lambda\nu)}{I_{\tau_n}(\lambda\nu_0)}Sin(\tau_n\varphi) \quad avec \quad C_n(\lambda)=\int_0^{\varphi_0}d\varphi\,Sin(\tau_n\varphi)\int_{\mu_0}^{+\infty}d\mu\,\mu\Psi_{\tau_n}(\lambda\mu)f_1(\mu,\varphi)$$

Transformation intégrale: application aux problèmes aux limites intérieur de Dirichlet inhomogène en ν, Dirichlet homogène en μ et en φ du domaine frontière d'un secteur azimutal de paraboloïde de révolution tronqué μ€[μ₀,∞], ν€[ν₁, ν₂], φ€[0, φ₀]

Un secteur de paraboloïde de révolution tronqué creux :



Avec le théorème de Hankel et sa partie sur la transformation de Weber/Dirichlet, il devient possible de construire une série de représentations intégrales de la solution de ce problème intérieur :

$$\Delta T(\mu,\nu,\varphi)=0 \quad (\mu,\nu,\varphi)\in[\mu_0,+\infty]\times[\nu_1,\nu_2]\times[0,\varphi_0] \quad T(\mu,\nu,\varphi)\ fini$$

$$C.L. \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_1}=f_1(\mu) \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\nu=\nu_2}=f_2(\mu) \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\mu=\mu_0}=0 \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=0}=0 \quad T(\mu,\nu,\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_0}=0$$

sous la forme suivante :

$$\tau_n=\frac{n\pi}{\varphi_0} \qquad \Psi_{\tau_n}(\lambda\mu)=J_{\tau_n}(\lambda\mu)Y_{\tau_n}(\lambda\mu_0)-Y_{\tau_n}(\lambda\mu)J_{\tau_n}(\lambda\mu_0)$$

$$T(\mu,\nu,\varphi)=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=1}^{n=+\infty}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{\lambda\,\Psi_{\tau_n}(\lambda\mu)Sin(\tau_n\varphi)}{\left(J_{\tau_n}(\lambda\mu_0)\right)^2+\left(Y_{\tau_n}(\lambda\mu_0)\right)^2}\left\{C_n(\lambda)\frac{I_n(\lambda\nu)K_n(\lambda\nu_2)-I_n(\lambda\nu_2)K_n(\lambda\nu)}{I_n(\lambda\nu_1)K_n(\lambda\nu_2)-I_n(\lambda\nu_2)K_n(\lambda\nu_1)}+D_n(\lambda)\frac{I_n(\lambda\nu_1)K_n(\lambda\nu)-I_n(\lambda\nu)K_n(\lambda\nu \ldots}{I_n(\lambda\nu_1)K_n(\lambda\nu_2)-I_n(\lambda\nu_2)K_n(\lambda \ldots}\right.$$

$$avec \quad C_n(\lambda)=\int_0^{\varphi_0}d\varphi\,Sin(\tau_n\varphi)\int_{\mu_0}^{+\infty}d\mu\;\mu\Psi_{\tau_n}(\lambda\mu)f_1(\mu,\varphi) \quad et \quad D_n(\lambda)=\int_0^{\varphi_0}d\varphi\,Sin(\tau_n\varphi)\int_{\mu_0}^{+\infty}d\mu\;\mu\Psi_{\tau_n}(\lambda\mu)f_2(\mu,\varphi)$$

Quelques propriétés des fonctions de Bessel J,Y,I et K, développement asymptotique, zéros...

Zéros en argument de la fonction de Hankel de première espèce

Les relations de connexion entre les fonctions de Bessel K et celle de Hankel sont bien connues :

$$K_\nu(z)=\frac{i\pi}{2}e^{\frac{i\pi\nu}{2}}H_\nu^{(1)}\left(ze^{\frac{i\pi}{2}}\right)\quad -\pi < Arg(z)\leq\frac{\pi}{2}\quad et\quad -2\pi < Arg(z)\leq\frac{\pi}{2}\cdot$$

Il suffit donc d'étudier les zéros de la fonction de Bessel K et d'effectuer une rotation de 90° pour obtenir les zéros de la fonction de la fonction de Hankel de première espèce

Zéros en argument de la fonction de Bessel K d'ordre purement imaginaire

La fonction K-Bessel possède le développement en série valable partout sur le plan complexe

$$\nu=i\tau\quad \Phi_{\tau,l}=Arg(\Gamma(1+l+i\tau))=\frac{1}{2i}Log\left(\frac{\Gamma(1+l+i\tau)}{\Gamma(1+l-i\tau)}\right)$$

$$K_{i\tau}(z)=-\left(\frac{\tau\pi}{Sinh(\tau\pi)}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{Sin\left(\tau\,Log\left(\frac{z}{2}\right)-\Phi_{\tau,l}\right)}{l!\sqrt{\tau^2(1+\tau^2)\cdots(l^2+\tau^2)}}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l}$$

Le « déphasage » est définie de manière à ce que la fonction résultante est toujours continue pour toute valeur réelle de τ , pour chaque valeur de l. La fonction également tendre vers 0 lorsque τ s'annule. Il faut donc prendre une branche à chaque particulière de la fonction de variable complex « argument » de manière à ce que cette continuité soit assurée. Cette continuité implique que le « déphasage » augmente continûment jusqu'à l'infini.

On se rend facilement compte que lorsque le module de z est petit ce sont principalement les premiers termes qui dominent, et en première approximation le premier

Zéros lorsque z <<1 : en première approximation

$$Sin\left(\tau\,Log\left(\frac{z}{2}\right)-\Phi_{\tau,0}\right)=0\Rightarrow\tau\,Log\left(\frac{z}{2}\right)=\pm n\pi+\frac{1}{2i}Log\left(\frac{\Gamma(1+l+i\tau)}{\Gamma(1+l-i\tau)}\right)$$

$$Log\left(\frac{z}{2}\right)=\pm\frac{n\pi}{\tau}+\frac{1}{2i\tau}Log\left(\frac{\Gamma(1+l+i\tau)}{\Gamma(1+l-i\tau)}\right)\quad .$$

$$\Rightarrow\begin{cases}Log(z)=-\frac{n\pi}{\tau}+\frac{1}{2i\tau}Log\left(\frac{\Gamma(1+l+i\tau)}{\Gamma(1+l-i\tau)}\right)+Log(2)\\ Arg(z)=0\quad z\in\mathbf{R}\end{cases}\Rightarrow z\to x_n\approx 2e^{\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{2i}Log\left(\frac{\Gamma(1+l+i\tau)}{\Gamma(1+l-i\tau)}\right)-n\pi\right)}$$

<u>Zéros lorsque z <<1 : en deuxième approximation</u> : prenons les deux premiers termes du développement :

$$\nu = i\tau \quad \Phi_{\tau,l} = Arg\left(\Gamma(1+l+i\tau)\right) = \frac{1}{2i} Log\left(\frac{\Gamma(1+l+i\tau)}{\Gamma(1+l-i\tau)}\right)$$

$$\Phi_{\tau,1} = \frac{1}{2i} Log\left(\frac{\Gamma(2+i\tau)}{\Gamma(2-i\tau)}\right) = \frac{1}{2i} Log\left(\frac{(1+i\tau)}{(1-i\tau)}\frac{\Gamma(1+i\tau)}{\Gamma(1-i\tau)}\right) = \Phi_{\tau,0} + Arg(1+i\tau)$$

$$K_{i\tau}(z) \approx -\left(\frac{\tau\pi}{Sinh(\tau\pi)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{Sin\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right) - \Phi_{\tau,0}\right)}{\tau} + \frac{z^2}{4}\frac{Sin\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right) - \Phi_{\tau,1}\right)}{\tau\sqrt{(1+\tau^2)}}\right)$$

$$\Rightarrow Sin\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\right)Cos(\Phi_{\tau,0}) - Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\right)Sin(\Phi_{\tau,0}) \approx -\frac{z^2}{4}\frac{Sin\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\right)Cos(\Phi_{\tau,1}) - Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\right)Sin(\Phi_{\tau,1})}{\sqrt{(1+\tau^2)}}$$

$$Sin\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\right)\left\{Cos(\Phi_{\tau,0}) + \frac{z^2 Cos(\Phi_{\tau,1})}{4\sqrt{(1+\tau^2)}}\right\} \approx Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\right)\left\{Sin(\Phi_{\tau,0}) + \frac{z^2 Sin(\Phi_{\tau,1})}{4\sqrt{(1+\tau^2)}}\right\}$$

$$Tan\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\right) \approx \frac{Sin(\Phi_{\tau,0})}{Cos(\Phi_{\tau,0})}\frac{\left\{1 + \frac{z^2 Sin(\Phi_{\tau,1})}{4\sqrt{(1+\tau^2)}Sin(\Phi_{\tau,0})}\right\}}{\left\{1 + \frac{z^2 Cos(\Phi_{\tau,1})}{4\sqrt{(1+\tau^2)}Cos(\Phi_{\tau,0})}\right\}} \approx \frac{Sin(\Phi_{\tau,0})}{Cos(\Phi_{\tau,0})}\left\{1 + \frac{z^2}{4\sqrt{(1+\tau^2)}}\frac{Sin(\Phi_{\tau,1} - \Phi_{\tau,0})}{Sin(\Phi_{\tau,0})Cos(\Phi_{\tau,0})}\right\}$$

$$\Rightarrow Tan\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\right) \approx Tan(\Phi_{\tau,0}) + \frac{z^2\left(Sin(\Phi_{\tau,1} - \Phi_{\tau,0})\right)}{4\sqrt{(1+\tau^2)}Cos^2(\Phi_{\tau,0})}$$

$$\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right) \approx -n\pi + ArcTan\left\{Tan(\Phi_{\tau,0}) + \frac{z^2\left(Sin(\Phi_{\tau,1} - \Phi_{\tau,0})\right)}{4\sqrt{(1+\tau^2)}Cos^2(\Phi_{\tau,0})}\right\}$$

$$Comme \quad ArcTan\left(X_0 + \frac{z^2}{4\sqrt{(1+\tau^2)}}X_1\right) \approx ArcTan(X_0) + \frac{z^2}{4\sqrt{(1+\tau^2)}}\frac{X_1}{(1+X_0{}^2)}$$

$$\frac{X_1}{(1+X_0{}^2)} = Sin(\Phi_{\tau,1} - \Phi_{\tau,0}) \Rightarrow \tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right) \approx -n\pi + \Phi_{\tau,0} + \frac{z^2 Sin(\Phi_{\tau,1} - \Phi_{\tau,0})}{4\sqrt{(1+\tau^2)}}$$

$$\Rightarrow Log\left(\frac{z}{2}\right) \approx \frac{\Phi_{\tau,0} - n\pi}{\tau} + \frac{z^2 Sin(\Phi_{\tau,1} - \Phi_{\tau,0})}{4\tau\sqrt{(1+\tau^2)}} \Rightarrow z \approx 2e^{\frac{\Phi_{\tau,0} - n\pi}{\tau}}\left(1 + \frac{z^2 Sin(\Phi_{\tau,1} - \Phi_{\tau,0})}{4\tau\sqrt{(1+\tau^2)}}\right)$$

$$\Rightarrow z \approx 2e^{\frac{\Phi_{\tau,0} - n\pi}{\tau}}\left(1 + \frac{e^{2\frac{\Phi_{\tau,0} - n\pi}{\tau}} Sin(\Phi_{\tau,1} - \Phi_{\tau,0})}{\tau\sqrt{(1+\tau^2)}}\right) \Leftarrow \Phi_{\tau,1} - \Phi_{\tau,0} = Arg(1+i\tau) = ArcTan(\tau)$$

$$Et \quad Sin(ArcTan(\tau)) = \frac{\tau}{\sqrt{(1+\tau^2)}} \Rightarrow z = x_n \approx 2e^{\frac{\Phi_{\tau,0} - n\pi}{\tau}}\left(1 + \frac{e^{2\frac{\Phi_{\tau,0} - n\pi}{\tau}}}{1+\tau^2}\right)$$

Et l'on retrouve bien l'expression donnée par Dunster dans son article de 1990 « Bessel Functions of Purely Imaginary Order ».

Zéros lorsque τ >>1 : en deuxième approximation

Je donne l'expression fournie par Dunster exprimée à l'aide des zéros des fonctions de Airy

a_n $n-$ *ième zéros négatifs de la fonction de Airy* $\Leftrightarrow Airy(a_n)=0$

$$x_n \approx \tau + \left(\frac{\tau}{2}\right)^{\frac{1}{3}} a_n + \frac{3}{20}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} a_n{}^2$$

Il s'avère qu'il faut pousser au delà les développements de la fonction de Bessel-K et de sa dérivée première car la formule s'avère également valable pour des valeurs de τ à partir de 5.

Développements asymptotiques des fonctions de Bessel J, Y et Hankel H1, H2 et des fonctions modifiées de Bessel K, I

Les développements asymptotiques des fonctions de Bessel ont une importance capitale pour la détermination des zéros des diverses fonctions de Bessel. Ces derniers sont couramment utilisés pour la résolution analytique des problèmes aux limites en physique mathématique. L'intérêt du développement asymptotique est de « simplifier » le comportement de la fonction étudiée en la réduisant à un nombre fini de terme (parfois même un seul suffit) qui se rapporte à d'autres fonctions plus classiques. Le développement asymptotique peut également réduire la complexité d'une équation transcendantale et la recherche de ses racines.

Développements asymptotiques des fonctions de Bessel d'ordre ν et d'argument ν z, tous deux grand.

Les premiers développements que nous exposons concernent les fonctions de Bessel d'ordre ν et d'argument ν z, tous deux grand. Ces développements sont étendus aux fonctions de Bessel modifiée d'ordre purement imaginaire i τ et d'argument τ z. La particularité de ces développement est qu'il font intervenir les fonctions d'Airy Ai et Bi ainsi que leurs dérivées premières.

Il faut bien avouer que c'est un véritable jeu de piste dans les diverses publications que de trouver la forme « exacte » des développements et leur processus de construction. Ce travail de « décryptage » bibliographique plus poussée est nécessaire de manière à vérifier la cohérence des informations, à ce titre l'information la plus complète et la plus condensée se trouve dans le toujours très fameux « M.Abramovitz.I.A.Stegun-Handbook of Mathematical Functions » avec un exposé clair et condensé des règles de détermination et de récurrence des coefficients. Quatre formules représentent le développement asymptotique des fonctions de Bessel J et Y (voir 9.3.35, 9.3.36, 9.3.43 et 9.3.44):

$$\left|Arg(z)\right|<\pi \Rightarrow \begin{cases} J_\nu(\nu z)\approx \dfrac{\sqrt{2}}{\nu^{\frac{1}{3}}}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{Ai\left(\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\dfrac{A_s(\zeta)}{\nu^{2s}}+\dfrac{Ai'\left(\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\nu^{\frac{4}{3}}}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\dfrac{B_s(\zeta)}{\nu^{2s}}\right\} \\ Y_\nu(\nu z)\approx -\dfrac{\sqrt{2}}{\nu^{\frac{1}{3}}}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{Bi\left(\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\dfrac{A_s(\zeta)}{\nu^{2s}}+\dfrac{Bi'\left(\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\nu^{\frac{4}{3}}}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\dfrac{B_s(\zeta)}{\nu^{2s}}\right\} \\ J_\nu'(\nu z)\approx -\dfrac{\sqrt{2}}{z}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{\dfrac{Ai\left(\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\nu^{\frac{4}{3}}}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\dfrac{C_s(\zeta)}{\nu^{2s}}+\dfrac{e^{\frac{2i\pi}{3}}Ai'\left(\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\nu^{\frac{2}{3}}}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\dfrac{D_s(\zeta)}{\nu^{2s}}\right\} \\ Y_\nu'(\nu z)\approx \dfrac{\sqrt{2}}{z}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{\dfrac{Bi\left(\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\nu^{\frac{4}{3}}}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\dfrac{C_s(\zeta)}{\nu^{2s}}+\dfrac{e^{\frac{2i\pi}{3}}Bi'\left(\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\nu^{\frac{2}{3}}}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\dfrac{D_s(\zeta)}{\nu^{2s}}\right\} \end{cases}$$

$$\zeta=\zeta(z) \quad \text{tel que} \quad \frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}=\int_z^1 dt\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}=Log\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)-\sqrt{1-z^2}$$

D'où l'on tire le développement de la fonction de Hankel H1, en formules 9.3.37 et 9.3.45, l'aide de des deux relations :

$$\begin{cases} H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+iY_\nu(z)\Rightarrow\begin{cases}H_\nu^{(1)}(\nu z)=J_\nu(\nu z)+iY_\nu(\nu z)\\ H_\nu^{(1)}{}'(\nu z)=J_\nu'(\nu z)+iY_\nu'(\nu z)\end{cases} \\ H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-iY_\nu(z)\Rightarrow\begin{cases}H_\nu^{(2)}(\nu z)=J_\nu(\nu z)-iY_\nu(\nu z)\\ H_\nu^{(2)}{}'(\nu z)=J_\nu'(\nu z)-iY_\nu'(\nu z)\end{cases} \\ Ai\left(ze^{\pm\frac{2i\pi}{3}}\right)=\dfrac{e^{\pm\frac{i\pi}{3}}}{2}\left\{Ai(z)\mp iBi(z)\right\}\Rightarrow Ai(z)\mp iBi(z)=2e^{\mp\frac{i\pi}{3}}Ai\left(ze^{\pm\frac{2i\pi}{3}}\right) \\ \Rightarrow Ai'\left(ze^{\pm\frac{2i\pi}{3}}\right)=\dfrac{e^{\mp\frac{i\pi}{3}}}{2}\left\{Ai'(z)\mp iBi'(z)\right\}\Rightarrow Ai'(z)\mp iBi'(z)=2e^{\pm\frac{i\pi}{3}}Ai'\left(ze^{\pm\frac{2i\pi}{3}}\right) \end{cases}$$

Les formules 9.3.37 et 9.3.45 donnent :

$$H_\nu^{(1)}(\nu z)=J_\nu(\nu z)+iY_\nu(\nu z) \quad H_\nu^{(1)}{}'(\nu z)=J_\nu{}'(\nu z)+iY_\nu{}'(\nu z)$$

$$Ai(z)-iBi(z)=2e^{-\frac{i\pi}{3}}Ai\left(ze^{+\frac{2i\pi}{3}}\right) \quad Ai'(z)-iBi'(z)=2e^{+\frac{i\pi}{3}}Ai'\left(ze^{+\frac{2i\pi}{3}}\right)$$

$$H_\nu^{(1)}(\nu z)\approx\frac{2e^{-\frac{i\pi}{3}}\sqrt{2}}{\nu^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{Ai\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{A_s(\zeta)}{\nu^{2s}}+e^{\frac{2i\pi}{3}}\frac{Ai'\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\nu^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{B_s(\zeta)}{\nu^{2s}}\right\}.$$

$$H_\nu^{(1)}{}'(\nu z)\approx\frac{2e^{\frac{2i\pi}{3}}\sqrt{2}}{z}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{\frac{Ai\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\nu^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{C_s(\zeta)}{\nu^{2s}}+e^{\frac{2i\pi}{3}}\frac{Ai'\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\nu^{\frac{2}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{D_s(\zeta)}{\nu^{2s}}\right\}$$

Formules données telles quelles dans l'ouvrage de M.Abramovitz.I.A.Stegun « Handbook of Mathematical Functions » :

$$|Arg(z)|<\pi\Rightarrow\begin{cases}H_\nu^{(1)}(\nu z)\approx\dfrac{2e^{-\frac{i\pi}{3}}}{\nu^{\frac{1}{3}}}\left(\dfrac{4\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{Ai\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{A_s(\zeta)}{\nu^{2s}}+\frac{Ai'\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\nu^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{B_s(\zeta)}{\nu^{2s}}\right\}\\ H_\nu^{(1)}{}'(\nu z)\approx\dfrac{4e^{\frac{2i\pi}{3}}}{z}\left(\dfrac{4\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{\dfrac{Ai\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\nu^{\frac{4}{3}}}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{C_s(\zeta)}{\nu^{2s}}+e^{\frac{2i\pi}{3}}\frac{Ai'\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\nu^{\frac{2}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{D_s(\zeta)}{\nu^{2s}}\right\}\end{cases}.$$

Pour la fonction de Hankel de deuxième espèce (ou 4ème si l'on veut), il vient :

$$H_\nu^{(2)}(\nu z)=J_\nu(\nu z)-iY_\nu(\nu z)\quad H_\nu^{(2)}{}'(\nu z)=J_\nu{}'(\nu z)-iY_\nu{}'(\nu z)$$

$$Ai(z)+iBi(z)=2e^{\frac{i\pi}{3}}Ai\left(ze^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)\quad Ai'(z)+iBi'(z)=2e^{-\frac{i\pi}{3}}Ai'\left(ze^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)$$

$$H_\nu^{(2)}(\nu z)\approx\frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}\sqrt{2}}{\nu^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{Ai\left(e^{-\frac{2i\pi}{3}}\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{A_s(\zeta)}{\nu^{2s}}+e^{-\frac{2i\pi}{3}}\frac{Ai'\left(e^{-\frac{2i\pi}{3}}\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\nu^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{B_s(\zeta)}{\nu^{2s}}\right\}.$$

$$H_\nu^{(2)}{}'(\nu z)\approx\frac{2e^{-\frac{2i\pi}{3}}\sqrt{2}}{z}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{\frac{Ai\left(e^{-\frac{2i\pi}{3}}\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\nu^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{C_s(\zeta)}{\nu^{2s}}+e^{-\frac{2i\pi}{3}}\frac{Ai'\left(e^{-\frac{2i\pi}{3}}\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\nu^{\frac{2}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{D_s(\zeta)}{\nu^{2s}}\right\}$$

Du développement de la fonction de Hankel H1, on en tire les formules sur le développement asymptotique de la fonction Bessel K justement lorsque l'ordre est purement imaginaire car dans ce cas le développement asymptotique est directement proportionnel à celui de la fonction de Hankel H_1, le déphasage introduit dans les arguments des fonctions d'Airy étant alors neutralisé !

Les deux développements utilisés pour la fonction de Bessel-K d'ordre purement imaginaire, sont tous deux valables dans le plan complexe. Le premier développement est dû à F.W.J.Olver, W.Rheinbolt Asymptotics and Special Functions, 1974, 10.6 chap 11), <u>et lorsque l'argument est un nombre réel, il reste réel pour des valeurs inférieur à 1</u>. Le second a été publié quelques années avant en 1966 C.B.Balogh-Uniform asymptotic expansions of the Modified Bessel Function of the Third Kind of Large Imaginary Order et 1967 C.B.Balogh-Asymptotic Expansions of the Modified Bessel Function of the Third Kind of Imaginary Order. <u>Lorsque l'argument est un nombre réel, il reste réel pour des valeurs supérieur à 1</u>. Le premier développement est corroboré par l'inscription dans le « Handbook of Mathematical Functions » de M.Abramovitz.I.A.Stegun en formules 9.3.37 et 9.3.45 de la fonction de Hankel H1 et en les transformant pour revenir à la fonction Bessel-K.

Ici je reporte les développements en « normalisant » autant que faire se peut les coefficients de manière obtenir une harmonisation entre les diverses publications cités! Voici ceux dus à F.W.J.Olver :

$$|Arg(z)|<\pi\Rightarrow\begin{cases}K_{i\tau}(\tau z)\approx\dfrac{\pi e^{-\frac{\tau\pi}{2}}\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{A_s(\zeta)}{\tau^{2s}}+\frac{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{B_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\}\\[2ex] K_{i\tau}{}'(\tau z)\approx\dfrac{\pi e^{-\frac{\tau\pi}{2}}\sqrt{2}}{z\tau^{\frac{2}{3}}}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{-\dfrac{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{2}{3}}}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{C_s(\zeta)}{\tau^{2s}}+Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{D_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\}\end{cases}$$

$$\zeta=\zeta(z)\quad\textit{tel que}\quad\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}=Log\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)-\sqrt{1-z^2}$$

Partant de cette définition et du lien entre la fonction de Hankel H_1 et la fonction de Bessel-K, on retrouve les deux formules établies pour la fonction de Bessel-K d'ordre purement imaginaire :

$$K_\nu(z)=\frac{i\pi e^{\frac{i\pi\nu}{2}}}{2}H_\nu^{(1)}\left(e^{\frac{i\pi}{2}}z\right)\Rightarrow K_{i\tau}(\tau z)=\frac{i\pi\, e^{-\frac{\pi\tau}{2}}}{2}H_{i\tau}^{(1)}\left(e^{\frac{i\pi}{2}}\tau z\right)=\frac{i\pi\, e^{-\frac{\pi\tau}{2}}}{2}H_\nu^{(1)}(\nu z)\Big|_{\nu=i\tau}$$

$$K_\nu'(z)=-\frac{\pi e^{\frac{i\pi\nu}{2}}}{2}H_\nu^{(1)\prime}\left(e^{\frac{i\pi}{2}}z\right)\Rightarrow K_{i\tau}'(\tau z)=\frac{\partial K_{i\tau}(y)}{\partial y}\Big|_{y=\tau z}=-\frac{\pi\, e^{-\frac{\pi\tau}{2}}}{2}H_\nu^{(1)\prime}(\nu z)\Big|_{\nu=i\tau}$$

$$e^{\frac{2i\pi}{3}}i^{\frac{1}{3}}=-1\quad i\frac{e^{-\frac{i\pi}{3}}}{i^{\frac{1}{3}}}=i^{\frac{2}{3}}e^{-\frac{i\pi}{3}}=1\Rightarrow\frac{e^{-\frac{i\pi}{3}}}{i^{\frac{1}{3}}}=-i\quad i^{2s}=(-1)^s\quad\frac{e^{\frac{2i\pi}{3}}}{i^{\frac{4}{3}}}=1\qquad\frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}}{i^{\frac{2}{3}}}=-1$$

$$\Rightarrow H_\nu^{(1)}(\nu z)\Big|_{\nu=i\tau}\approx -i\frac{2\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^sA_s(\zeta)}{\tau^{2s}}+\frac{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^sB_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\}$$

$$\Rightarrow K_{i\tau}(\tau z)=\frac{\pi\, e^{-\frac{\pi\tau}{2}}\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^sA_s(\zeta)}{\tau^{2s}}+\frac{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^sB_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\}$$

$$\Rightarrow H_\nu^{(1)\prime}(\nu z)\Big|_{\nu=i\tau}\approx\frac{2\sqrt{2}}{z}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{\frac{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^sC_s(\zeta)}{\tau^{2s}}-\frac{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{2}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^sD_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\}$$

$$\Rightarrow K_{i\tau}'(\tau z)=\frac{\pi\, e^{-\frac{\pi\tau}{2}}\sqrt{2}}{z}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{-\frac{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^sC_s(\zeta)}{\tau^{2s}}+\frac{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{2}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^sD_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\}$$

Donnons le développement asymptotique de la fonction de Hankel H2 et de sa dérivée pour cette valeur particulière de l'ordre :

$$H_\nu^{(2)}(\nu z)\Big|_{\nu=i\tau}\approx\frac{2e^{\frac{i\pi}{6}}\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{Ai\left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{A_s(\zeta)}{\tau^{2s}}+e^{\frac{2i\pi}{3}}\frac{Ai'\left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{B_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\}$$

$$H_\nu^{(2)\prime}(\nu z)\Big|_{\nu=i\tau}\approx\frac{2\sqrt{2}}{z}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{e^{\frac{2i\pi}{3}}\frac{Ai\left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{C_s(\zeta)}{\tau^{2s}}+e^{\frac{i\pi}{3}}\frac{Ai'\left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{2}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{D_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\}$$

.

L'article de Dunster de 1990 « Bessel Functions of Purely Imaginary Order » donne l'expression de la fonction de Bessel modifiée L construite à partir de la fonction de Bessel modifiée I. La fonction L permet de calculer le développement complet de la partie réelle de la fonction Bessel I :

$$L_{i\tau}(z)=\frac{\pi}{2Sinh(\pi\tau)}\left(I_{i\tau}(z)+I_{-i\tau}(z)\right)=\frac{\pi}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Re}\left(I_{i\tau}(z)\right) \quad L_{i\tau}'(z)=\frac{\pi}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Re}\left(I_{i\tau}'(z)\right)$$

$$\mathrm{Re}\left(I_{i\tau}(z)\right)=\frac{Sinh(\pi\tau)}{\pi}L_{i\tau}(z) \qquad \mathrm{Re}\left(I_{i\tau}'(z)\right)=\frac{Sinh(\pi\tau)}{\pi}L_{i\tau}'(z)$$

De plus

$$\begin{cases} L_{i\tau}(z)=\dfrac{\pi}{2Sinh(\pi\tau)}\left(e^{-\frac{\tau\pi}{2}}Cosh(\pi\tau)H_{i\tau}^{(1)}(i\,z)+e^{\frac{\tau\pi}{2}}H_{i\tau}^{(2)}(i\,z)\right)= \\ =\dfrac{\pi\,e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{2Sinh(\pi\tau)}\left(\dfrac{H_{i\tau}^{(1)}(i\,z)}{2}+H_{i\tau}^{(2)}(i\,z)\right)+\dfrac{\pi\,e^{-\frac{3\tau\pi}{2}}H_{i\tau}^{(1)}(i\,z)}{4Sinh(\pi\tau)} \\ L_{i\tau}'(z)=\dfrac{i\pi}{2Sinh(\pi\tau)}\left(e^{-\frac{\tau\pi}{2}}Cosh(\pi\tau)H_{i\tau}^{(1)\prime}(i\,z)+e^{\frac{\tau\pi}{2}}H_{i\tau}^{(2)\prime}(i\,z)\right)= \\ =\dfrac{i\pi\,e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{2Sinh(\pi\tau)}\left(\dfrac{H_{i\tau}^{(1)\prime}(i\,z)}{2}+H_{i\tau}^{(2)\prime}(i\,z)\right)+\dfrac{i\pi\,e^{-\frac{3\tau\pi}{2}}H_{i\tau}^{(1)\prime}(i\,z)}{4Sinh(\pi\tau)} \end{cases}.$$

Mais attention dès lors que l'on envisage un développement asymptotique pour un ordre grand, alors il faut négliger le dernier terme en exponentiel négatif de l'ordre, on écrira donc :

$$\begin{cases} L_{i\tau}(\tau\,z)\approx\dfrac{\pi\,e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{2Sinh(\pi\tau)}\left(\dfrac{H_{\nu}^{(1)}(\nu\,z)\big|_{\nu=i\tau}}{2}+H_{\nu}^{(2)}(\nu\,z)\big|_{\nu=i\tau}\right) \\ L_{i\tau}'(\tau\,z)\approx\dfrac{i\pi\,e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{2Sinh(\pi\tau)}\left(\dfrac{H_{\nu}^{(1)\prime}(\nu\,z)\big|_{\nu=i\tau}}{2}+H_{\nu}^{(2)\prime}(\nu\,z)\big|_{\nu=i\tau}\right) \end{cases}$$

On en tire le développement de la fonction de Bessel L :

$$L_{i\tau}(\tau z) = \frac{\pi e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{2Sinh(\pi\tau)}\left(\frac{H_\nu^{(1)}(\nu z)\big|_{\nu=i\tau}}{2} + H_\nu^{(2)}(\nu z)\big|_{\nu=i\tau}\right)$$

$$L_{i\tau}(\tau z) = \frac{\pi\sqrt{2}}{Sinh(\pi\tau)\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{\begin{array}{l} -\frac{ie^{+\frac{\tau\pi}{2}}}{2}\left\{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s A_s(\zeta)}{\tau^{2s}} + \frac{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s B_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\} + \\ +e^{\frac{i\pi}{6}}e^{\frac{\tau\pi}{2}}\left\{Ai\left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{A_s(\zeta)}{\tau^{2s}} + e^{\frac{2i\pi}{3}}\frac{Ai'\left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{B_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\} \end{array}\right\}$$

$$Ai\left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) = Ai\left(-e^{\frac{2i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2}\left\{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) - iBi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}$$

$$Ai'\left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) = Ai'\left(-e^{\frac{2i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{3}}}{2}\left\{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) - iBi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}$$

.

Ce qui devient :

$$L_{i\tau}(\tau z) = \frac{\pi\sqrt{2}}{Sinh(\pi\tau)\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{\begin{array}{l} -\frac{ie^{\frac{\tau\pi}{2}}}{2}\left\{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s A_s(\zeta)}{\tau^{2s}} + \frac{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s B_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\} + \\ +\frac{ie^{\frac{\tau\pi}{2}}}{2}\left\{\begin{array}{l}\left\{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) - iBi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{A_s(\zeta)}{\tau^{2s}} + \\ +\frac{\left\{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) - iBi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{B_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\end{array}\right\} \end{array}\right\}.$$

$$L_{i\tau}(\tau z) = \frac{\pi\sqrt{2}}{Sinh(\pi\tau)\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{2}\left\{Bi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{A_s(\zeta)}{\tau^{2s}} + \frac{Bi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{B_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\}$$

$$L_{i\tau}(\tau z) = \frac{e^{\frac{\tau\pi}{2}}\pi\sqrt{2}}{2Sinh(\pi\tau)\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{Bi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{A_s(\zeta)}{\tau^{2s}} + \frac{Bi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{B_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\}$$

Pour la dérivée première de cette fonction on écrira :

$$L_{i\tau}'(\tau z) \approx \frac{i\pi e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{2Sinh(\pi\tau)}\frac{\sqrt{2}}{z}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left(\begin{array}{l}\dfrac{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s C_s(\zeta)}{\tau^{2s}} - \dfrac{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{2}{3}}}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s D_s(\zeta)}{\tau^{2s}} + \\ +2\left\{e^{\frac{2i\pi}{3}}\dfrac{Ai\left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{C_s(\zeta)}{\tau^{2s}} + e^{\frac{i\pi}{3}}\dfrac{Ai'\left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{2}{3}}}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{D_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\}\end{array}\right)$$

$$Ai\left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) = Ai\left(-e^{\frac{2i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2}\left\{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) - iBi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}$$

$$Ai'\left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) = Ai'\left(-e^{\frac{2i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{3}}}{2}\left\{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) - iBi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}$$

$$\Rightarrow L_{i\tau}'(\tau z) \approx \frac{\pi e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{2Sinh(\pi\tau)}\frac{\sqrt{2}}{z}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{\frac{Bi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{2}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{D_s(\zeta)}{\tau^{2s}} - \frac{Bi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{C_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\}$$

D'après les formules de connexions usuelles sur les fonctions de Bessel modifiées

$$L_{i\tau}(\tau z) = \frac{\pi}{2Sinh(\pi\tau)}\{I_{i\tau}(\tau z) + I_{-i\tau}(\tau z)\} \quad K_{i\tau}(\tau z) = \frac{i\pi}{2Sinh(\pi\tau)}\{I_{i\tau}(\tau z) - I_{-i\tau}(\tau z)\}$$

$$\Rightarrow I_{i\tau}(\tau z) = \frac{Sinh(\pi\tau)}{\pi}\{L_{i\tau}(\tau z) - iK_{i\tau}(\tau z)\}$$

$$Or \quad \left\{\begin{array}{l} L_{i\tau}(\tau z) \approx \dfrac{e^{\frac{\tau\pi}{2}}\pi\sqrt{2}}{2Sinh(\pi\tau)\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{Bi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{A_s(\zeta)}{\tau^{2s}} + \dfrac{Bi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{B_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\} \\ K_{i\tau}(\tau z) \approx \dfrac{\pi e^{-\frac{\pi\tau}{2}}\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s A_s(\zeta)}{\tau^{2s}} + \dfrac{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s B_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\}\end{array}\right. .$$

$$\Rightarrow I_{i\tau}(\tau z) = \frac{e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{2\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{4\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{\begin{array}{l}\left\{Bi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) - iTanh(\pi\tau)Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{A_s(\zeta)}{\tau^{2s}} + \\ + \dfrac{\left\{Bi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) - iTanh(\pi\tau)Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}}{\tau^{\frac{4}{3}}}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{B_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\end{array}\right\}$$

Et pour la dérivée première :

$$I_{i\tau}'(\tau z)=\frac{Sinh(\pi\tau)}{\pi}\{L_{i\tau}'(\tau z)-iK_{i\tau}'(\tau z)\}$$

$$Or\quad\begin{cases}L_{i\tau}'(\tau z)\approx\dfrac{\pi e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{2Sinh(\pi\tau)}\dfrac{\sqrt{2}}{z}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{\dfrac{Bi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{2}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\dfrac{D_s(\zeta)}{\tau^{2s}}-\dfrac{Bi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\dfrac{C_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\}\\ K_{i\tau}'(\tau z)\approx\dfrac{\pi e^{-\frac{\pi\tau}{2}}\sqrt{2}}{z}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{\dfrac{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{2}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\dfrac{(-1)^sD_s(\zeta)}{\tau^{2s}}-\dfrac{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\dfrac{(-1)^sC_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\}\end{cases}.$$

$$\Rightarrow I_{i\tau}'(\tau z)=\frac{e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{2z}\left(\frac{4\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left\{Bi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)-iTanh(\pi\tau)Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}}{\tau^{\frac{2}{3}}}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{D_s(\zeta)}{\tau^{2s}}-\\-\dfrac{\left\{Bi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)-iTanh(\pi\tau)Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}}{\tau^{\frac{4}{3}}}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{C_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\end{array}\right\}$$

Etant donné que l'on se trouve dans un développement asymptotique, on peut sans problème remplacer le terme Tanh(πτ) par 1 car les autres termes sont nécessairement de la forme Exp(-2πτ), il vient donc :

$$I_{i\tau}(\tau z)=\frac{e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{2\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{4\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{\begin{array}{l}\left\{Bi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)-iAi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{A_s(\zeta)}{\tau^{2s}}+\\ +\frac{\left\{Bi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)-iAi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{B_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\end{array}\right\}$$

$$I_{i\tau}'(\tau z)=\frac{e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{2z}\left(\frac{4\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{\begin{array}{l}\frac{\left\{Bi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)-iAi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}}{\tau^{\frac{2}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{D_s(\zeta)}{\tau^{2s}}-\\ -\frac{\left\{Bi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)-iAi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{C_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\end{array}\right\}$$

$$Or\quad\begin{cases}-iAi\left(-e^{-\frac{2i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)=\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2}\left\{Bi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)-iAi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}\\ \Rightarrow Bi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)-iAi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)=2e^{-\frac{5i\pi}{6}}Ai\left(-e^{-\frac{2i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\\ -iAi'\left(-e^{-\frac{2i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)=\frac{e^{-\frac{i\pi}{3}}}{2}\left\{Bi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)-iAi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}\\ \Rightarrow Bi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)-iAi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)=2e^{-\frac{i\pi}{6}}Ai'\left(-e^{-\frac{2i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\\ -e^{-\frac{2i\pi}{3}}=e^{\frac{i\pi}{3}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}I_{i\tau}(\tau z)=\frac{e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{4\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{e^{-\frac{5i\pi}{6}}Ai\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{A_s(\zeta)}{\tau^{2s}}+\frac{e^{-\frac{i\pi}{6}}Ai'\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{B_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\}\\ I_{i\tau}'(\tau z)=\frac{e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{z}\left(\frac{4\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{\frac{e^{-\frac{i\pi}{6}}Ai'\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{2}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{D_s(\zeta)}{\tau^{2s}}-\frac{e^{-\frac{5i\pi}{6}}Ai\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{C_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\}\end{cases}$$

Développement en première approximation des fonctions de Bessel H1, H2 K et I

Des développements précédents, en toute première approximation pour les deux fonctions de Hankel H1 et H2 et leur dérivées, il vient :

$$H_\nu^{(1)}(\nu z)\big|_{\nu=i\tau} \approx -i\frac{2\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) \qquad H_\nu^{(1)}{}'(\nu z)\big|_{\nu=i\tau} \approx -\frac{2\sqrt{2}}{z\tau^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}} Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)$$

$$H_\nu^{(2)}(\nu z)\big|_{\nu=i\tau} \approx \frac{2e^{\frac{i\pi}{6}}\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} Ai\left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) \approx \frac{2e^{\frac{i\pi}{6}}\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} Ai\left(-e^{\frac{2i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)$$

$$H_\nu^{(2)}{}'(\nu z)\big|_{\nu=i\tau} \approx \frac{2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{3}}}{z\tau^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}} Ai'\left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) \approx \frac{2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{3}}}{z\tau^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}} Ai'\left(-e^{\frac{2i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)$$

$$Ai\left(-e^{\frac{2i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2}\left\{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) - iBi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\} \qquad Ai'\left(-e^{\frac{2i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{3}}}{2}\left\{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) - iBi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}$$

$$\Rightarrow H_\nu^{(2)}(\nu z)\big|_{\nu=i\tau} \approx \frac{i\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) - iBi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\} \approx \frac{\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{Bi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) + iAi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}$$

$$\Rightarrow H_\nu^{(2)}{}'(\nu z)\big|_{\nu=i\tau} \approx \frac{\sqrt{2}}{z\tau^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) - iBi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}$$

Il vient $\dfrac{H_\nu^{(1)}(\nu z)\big|_{\nu=i\tau}}{2} + H_\nu^{(2)}(\nu z)\big|_{\nu=i\tau} \approx -i\dfrac{\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{Bi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) + iAi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}$

$$\frac{H_\nu^{(1)}(\nu z)\big|_{\nu=i\tau}}{2} + H_\nu^{(2)}(\nu z)\big|_{\nu=i\tau} \approx \frac{\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} Bi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)$$

De même $\dfrac{H_\nu^{(1)}{}'(\nu z)\big|_{\nu=i\tau}}{2} + H_\nu^{(2)}{}'(\nu z)\big|_{\nu=i\tau} \approx -i\dfrac{\sqrt{2}}{z\tau^{\frac{2}{3}}}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}} Bi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)$

Pour les fonctions Bessel I et K, d'après les calculs précédents, nous obtenons :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(I_{i\tau}(\tau z)) \approx \dfrac{e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{2}\left(\dfrac{H_\nu^{(1)}(\nu z)\big|_{\nu=i\tau}}{2} + H_\nu^{(2)}(\nu z)\big|_{\nu=i\tau}\right) \\ \operatorname{Re}(I_{i\tau}{}'(\tau z)) \approx i\dfrac{e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{2}\left(\dfrac{H_\nu^{(1)}{}'(\nu z)\big|_{\nu=i\tau}}{2} + H_\nu^{(2)}{}'(\nu z)\big|_{\nu=i\tau}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{H_\nu^{(1)}(\nu z)\big|_{\nu=i\tau}}{2} + H_\nu^{(2)}(\nu z)\big|_{\nu=i\tau} \approx \dfrac{\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} Bi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) \\ \dfrac{H_\nu^{(1)}{}'(\nu z)\big|_{\nu=i\tau}}{2} + H_\nu^{(2)}{}'(\nu z)\big|_{\nu=i\tau} \approx -i\dfrac{\sqrt{2}}{z\tau^{\frac{2}{3}}}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}} Bi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(I_{i\tau}(\tau z)) \approx \dfrac{e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{\sqrt{2}\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} Bi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) \\ \operatorname{Re}(I_{i\tau}{}'(\tau z)) \approx \dfrac{e^{\frac{\tau\pi}{2}}}{z\sqrt{2}\tau^{\frac{2}{3}}}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}} Bi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) \end{cases}$$

Pour la fonction Bessel-K en première approximation, il vient :

$$K_{i\tau}(\tau z) = \frac{\pi e^{-\frac{\pi\tau}{2}}\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) \qquad K_{i\tau}'(\tau z) = \frac{\pi e^{-\frac{\pi\tau}{2}}\sqrt{2}}{z\tau^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}} Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right).$$

Le comportement asymptotique principal de la fonction de Bessel J d'ordre imaginaire et d'argument imaginaire est le suivant :

$$J_\nu(\nu z) \approx \frac{\sqrt{2}}{\nu^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} Ai\left(\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right) \Rightarrow J_{i\tau}(i\tau z) \approx \frac{e^{-\frac{i\pi}{6}}\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} Ai\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)$$

$$\Rightarrow J_{i\tau}(i\tau z) \approx \frac{e^{-\frac{i\pi}{6}}\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} Ai\left(-e^{-\frac{2i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) \Leftarrow Ai\left(-e^{-\frac{2i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{3}}}{2}\left\{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) + iBi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}$$

$$\Rightarrow J_{i\tau}(i\tau z) \approx -i\frac{\sqrt{2}}{2\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) + iBi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}.$$

$$\Rightarrow J_{i\tau}(i\tau z) \approx \frac{\sqrt{2}}{2\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{Bi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) - iAi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\{J_{i\tau}(i\tau z)\} \approx \dfrac{\sqrt{2}}{2\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} Bi\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) \\ \mathrm{Im}\{J_{i\tau}(i\tau z)\} \approx -\dfrac{\sqrt{2}}{2\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\dfrac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) \end{cases}$$

Le comportement asymptotique principal de la dérivée de la fonction de Bessel J d'ordre imaginaire et d'argument imaginaire est le suivant :

$$J_\nu'(\nu z) \approx -\frac{\sqrt{2}}{z\nu^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2i\pi}{3}} Ai'\left(\nu^{\frac{2}{3}}\zeta\right) \Rightarrow J_{i\tau}'(i\tau z) \approx -\frac{\sqrt{2}}{ze^{\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2i\pi}{3}} Ai'\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)$$

$$\Rightarrow J_{i\tau}'(i\tau z) \approx -\frac{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{3}}}{z\tau^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}} Ai'\left(-e^{-\frac{2i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) \Leftarrow Ai'\left(-e^{-\frac{2i\pi}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2}\left\{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) + iBi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}$$

$$\Rightarrow J_{i\tau}'(i\tau z) \approx -\frac{\sqrt{2}}{2z\tau^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2i\pi}{3}}\left\{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) + iBi'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\right\}$$

.

<u>Construction des coefficients pour les développements asymptotiques des fonctions de Bessel d'ordre v et d'argument v z, tous deux grand.</u>

Pour ces divers développements des fonctions de Bessel J, Y, Hankel H1, Hankel H2 les termes sont construits par une même récurrence plus ou moins compliquée :

$$\zeta = \zeta(z) \quad \text{tel que} \quad \frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}} = \int_z^1 dt \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} = Log\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right) - \sqrt{1-z^2} \,.$$

$$A_s(\zeta) = \sum_{m=0}^{2s} b_m \zeta^{-\frac{3m}{2}} U_{2s-m}(p) \quad B_s(\zeta) = -\zeta^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{2s+1} a_m \zeta^{-\frac{3m}{2}} U_{2s-m+1}(p)$$

$$C_s(\zeta) = -\zeta^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{2s+1} b_m \zeta^{-\frac{3m}{2}} V_{2s-m+1}(p) \quad D_s(\zeta) = \sum_{m=0}^{2s} a_m \zeta^{-\frac{3m}{2}} V_{2s-m}(p)$$

$$a_0 = 1 \quad a_m = \frac{(2m+1)(2m+3)\cdots(2m+(4m-1))}{m!(144)^m} \quad b_0 = 1 \quad b_m = -\frac{6m+1}{6m-1} a_m$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \qquad \begin{cases} U_0(p) = 1 \quad U_{s+1}(p) = \frac{1}{2} p^2 (1-p^2) U'_s(p) + \frac{1}{8} \int_0^p dq (1-5q^2) U_s(q) \\ V_0(p) = 1 \quad V_s(p) = U_s(p) - p(1-p^2) \left\{ \frac{1}{2} U_{s-1}(p) + p U_{s-1}'(p) \right\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_0(p) = 1 \quad U_1(p) = \frac{p}{24}(3-5p^2) \quad U_2(p) = \frac{p^2}{1152}(81 - 462p^2 + 385p^4) \\ U_3(p) = \frac{p^3}{414720}(30375 - 369603p^2 + 765765p^4 - 425425p^6) \quad \cdots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U_0(p) = 1 \quad U_1(p) = \frac{p}{24}(3-5p^2) \quad U_2(p) = p^2\left(\frac{9}{128} - \frac{77p^2}{192} + \frac{385p^4}{1152}\right) \\ U_3(p) = p^3\left(\frac{75}{1024} - \frac{4563p^2}{5120} + \frac{17017p^4}{9216} - \frac{85085p^6}{82944}\right) \quad \cdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_0(p) = 1 \quad V_1(p) = p\left(-\frac{3}{8} + \frac{7}{24}p^2\right) \quad V_2(p) = p^2\left(-\frac{15}{128} + \frac{33}{64}p^2 - \frac{455}{1152}p^4\right) \\ V_3(p) = p^3\left(-\frac{105}{1024} + \frac{5577}{5120}p^2 - \frac{6545}{3072}p^4 + \frac{95095}{82944}p^6\right) \quad \cdots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_0(p) = 1 \quad V_1(p) = \frac{p}{24}(-9+7p^2) \quad V_2(p) = \frac{p^2}{1152}(-135 + 594\,p^2 - 455\,p^4) \\ V_3(p) = \frac{p^3}{414720}(-42525 + 451737p^2 - 883575p^4 + 475475p^6) \quad \cdots \end{cases}$$

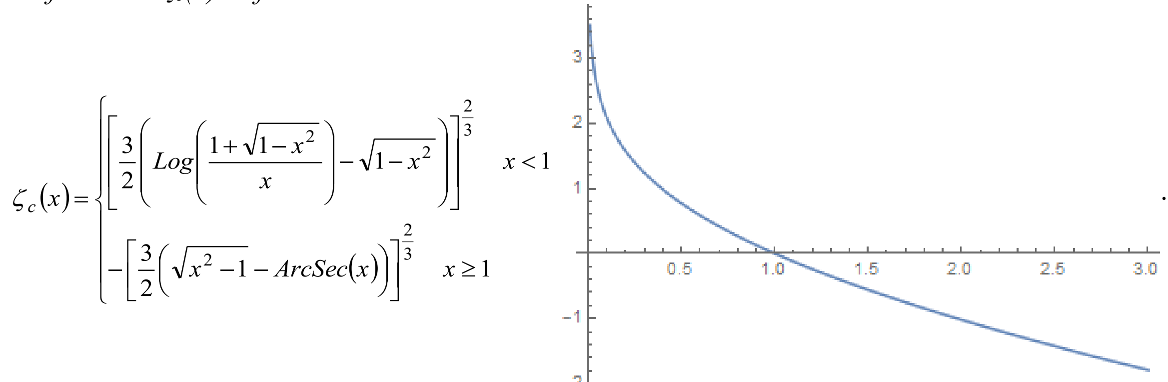
<u>Deuxième développement de C.Balogh concernant les fonctions modifiées Bessel K d'argument purement imaginaire i τ et d'argument τ z, tous deux grands</u>

Et pour le deuxième développement (voir 1966-C.B.Balogh-Uniform asymptotic expansions of the Modified Bessel Function of the Third Kind of Large Imaginary Order et 1967-C.B.Balogh-Asymptotic Expansions of the Modified Bessel Function of the Third Kind of Imaginary Order). Ici également je reporte les développements en « normalisant » autant que faire se peut les coefficients de manière à s'harmoniser entre les deux publications !

$$|Arg(z)|<\pi \Rightarrow \begin{cases} K_{i\tau}(\tau z)\approx \dfrac{\pi e^{-\frac{\tau\pi}{2}}\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\dfrac{\zeta}{z^2-1}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{ Ai\left(\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{A_s(\zeta)}{\tau^{2s}}+\frac{Ai'\left(\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{B_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\} \\ K_{i\tau}'(\tau z)\approx \dfrac{\pi e^{-\frac{\tau\pi}{2}}\sqrt{2}}{z\tau^{\frac{2}{3}}}\left(\dfrac{\zeta}{z^2-1}\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{ \dfrac{Ai\left(\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{2}{3}}}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{C_s(\zeta)}{\tau^{2s}}+Ai'\left(\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{D_s(\zeta)}{\tau^{2s}}\right\} \end{cases}.$$

$$\zeta=\zeta(z)\quad tel\ que\quad \frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}=\sqrt{z^2-1}-ArcSec(z)\qquad y=Sec(x)=\frac{1}{Cos(x)}\Leftrightarrow x=ArcSec(y)$$

La fonction $\zeta_c(x)$ définie comme suit est continue et dérivable en x=1 :



$$\zeta_c(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{3}{2}\left(Log\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)-\sqrt{1-x^2}\right)\right]^{\frac{2}{3}} & x<1\\ -\left[\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{x^2-1}-ArcSec(x)\right)\right]^{\frac{2}{3}} & x\geq 1\end{cases}.$$

La branche x>1 de la fonction ζ_c étant négative, cela produit un facteur $(-1)^m$ dans le développement. Pour ce deuxième développement les termes sont déterminés par une récurrence très similaire :

$$A_s(\zeta)=\sum_{m=0}^{2s}(-1)^m b_m\zeta^{-\frac{3m}{2}}U_{2s-m}(p)\quad B_s(\zeta)=\zeta^{-\frac{1}{2}}\sum_{m=0}^{2s+1}(-1)^m a_m\zeta^{-\frac{3m}{2}}U_{2s-m+1}(p)$$

$$C_s(\zeta)=\zeta^{\frac{1}{2}}\sum_{m=0}^{2s+1}(-1)^m b_m\zeta^{-\frac{3m}{2}}V_{2s-m+1}(p)\quad D_s(\zeta)=\sum_{m=0}^{2s}(-1)^m a_m\zeta^{-\frac{3m}{2}}V_{2s-m}(p)$$

$$a_0=1\quad a_m=\frac{(2m+1)(2m+3)\cdots(2m+(4m-1))}{m!(144)^m}\qquad b_0=1\quad b_m=-\frac{6m+1}{6m-1}a_m\qquad .$$

$$p=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\qquad \begin{cases}U_0(p)=1\quad U_{s+1}(p)=\dfrac{1}{2}p^2(p^2+1)U'_s(p)+\dfrac{1}{8}\displaystyle\int_0^p dq\,(1+5q^2)U_s(q)\\ V_0(p)=1\quad V_s(p)=(-1)^{s-1}\left[U_s(p)-p(p^2+1)\left\{\dfrac{1}{2}U_{s-1}(p)+pU_{s-1}'(p)\right\}\right]\end{cases}$$

Ici je donne les premiers termes que l'on peut soit trouver dans la littérature (bonne chance) soit les calculer à l'aide de Mathematica, en faisant jouer la récurrence :

$$\Rightarrow \begin{cases} U_0(p)=1 \quad U_1(p)=\frac{p}{24}\left(3+5p^2\right) \quad U_2(p)=\frac{\mathrm{p}^2}{1152}\left(81+462\,\mathrm{p}^2+385\,\mathrm{p}^4\right) \\ U_3(p)=\frac{\mathrm{p}^3}{414720}\left(30375+369603\,\mathrm{p}^2+765765\,\mathrm{p}^4+425425\,\mathrm{p}^6\right) \;\cdots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U_0(p)=1 \quad U_1(p)=\frac{p}{24}\left(3+5p^2\right) \quad U_2(p)=\mathrm{p}^2\left(\frac{9}{128}+\frac{77\,\mathrm{p}^2}{192}+\frac{385\,\mathrm{p}^4}{1152}\right) \\ U_3(p)=p^3\left(\frac{75}{1024}+\frac{4563p^2}{5120}+\frac{17017p^4}{9216}+\frac{85085p^6}{82944}\right) \;\cdots \end{cases}$$

.

$$\Rightarrow \begin{cases} V_0(p)=1 \quad V_1(p)=-p\left(\frac{3}{8}+\frac{7}{24}\mathrm{p}^2\right) \quad V_2(p)=p^2\left(\frac{15}{128}+\frac{33}{64}p^2+\frac{455}{1152}p^4\right) \\ V_3(p)=-\mathrm{p}^3\left(\frac{105}{1024}+\frac{5577}{5120}p^2+\frac{6545}{3072}p^4+\frac{95095}{82944}p^6\right) \;\cdots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_0(p)=1 \quad V_1(p)=-\frac{p}{24}\left(9+7p^2\right) \quad V_2(p)=\frac{p^2}{1152}\left(135+594\,p^2+455\,p^4\right) \\ V_3(p)=-\frac{p^3}{414720}\left(42525+451737p^2+883575p^4+475475p^6\right) \;\cdots \end{cases}$$

Les développements en série de Taylor de la fonction ς peut être trouvés plus facilement à partir du développement en série de la deuxième fonction ς (Mathematica calcule plus facilement la fonction contenant l'ArcSecante qui se trouve être l'exacte opposé du développement cherché.

$$\varsigma(x)=\left(\frac{3}{2}\left\{Log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)-\sqrt{1-x^2}\right\}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\varsigma(x)\approx 2^{\frac{1}{3}}\left(\begin{array}{l}(1-x)+\frac{3}{10}(x-1)^2-\frac{32}{175}(x-1)^3+\frac{1037}{7875}(x-1)^4-\frac{103727}{1010625}(x-1)^5+\frac{33060241}{394143750}(x-1)^6- \\ -\frac{4393499056}{62077640625}(x-1)^7+\frac{15356175508}{251266640625}(x-1)^8-\frac{296160295945538}{5514046428515625}(x-1)^9\end{array}\right)$$

$$\varsigma(x)=\left(\frac{3}{2}\left\{\sqrt{x^2-1}-ArcSec(x)\right\}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\varsigma(x)\approx 2^{\frac{1}{3}}\left(\begin{array}{l}(x-1)-\frac{3}{10}(x-1)^2+\frac{32}{175}(x-1)^3-\frac{1037}{7875}(x-1)^4+\frac{103727}{1010625}(x-1)^5-\frac{33060241}{394143750}(x-1)^6+ \\ +\frac{4393499056}{62077640625}(x-1)^7-\frac{15356175508}{251266640625}(x-1)^8+\frac{296160295945538}{5514046428515625}(x-1)^9\end{array}\right)$$

.

Développements asymptotiques des fonctions modifiés de Bessel I et K d'ordre ν et d'argument ν z tous deux grands

Cette deuxième catégorie de développement n'est pas en relation avec les fonctions d'Airy, mais la base théorique de la construction est fondamentalement la même. Là encore le passage vers les fonctions de Bessel J te Y permet d'en déterminer les développements lorsque l'ordre est purement imaginaire et l'argument réel. L'article de Dunster de 1990 « Bessel Functions of Purely Imaginary Order » donne l'expression finale obtenu pour la partie réelle de la fonction de Bessel J, mais il faut rechercher l'origine de la construction à un article de F.W.J.Olver de 1954 : "The Asymptotic Expansion of Bessel Functions of Large Order » qui reste l'article de référence pour la plupart des développements des fonctions de Bessel reporté dans « Abramovitz et Stegun ». Soit les développements des fonction de Bessel I et K

Ayant posé : $\zeta(z)=\sqrt{1+z^2}+Log\left(\dfrac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}\right)$

Les développements des fonctions et de leur dérivées premières s'écrivent :

$$I_\nu(\nu z)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\frac{e^{\nu\zeta}}{\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}\sum_{s=0}^{s=+\infty}\frac{U_s(p(z))}{\nu^s}\qquad I_\nu'(\nu z)\approx\frac{\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}{z}\frac{e^{\nu\zeta}}{\sqrt{2\pi\nu}}\sum_{s=0}^{s=+\infty}\frac{V_s(p(z))}{\nu^s}$$

$$K_\nu(\nu z)\approx\sqrt{\frac{\pi}{2\nu}}\frac{e^{-\nu\zeta}}{\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{U_s(p(z))}{\nu^s}\qquad K_\nu'(\nu z)\approx-\sqrt{\frac{\pi}{2\nu}}\frac{\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\nu\zeta}}{z}\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{V_s(p(z))}{\nu^s}$$

Les coefficients du développement sont calculés par des éléments similaire à la récurrence précédente :

$$p=p(z)=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\qquad\begin{cases}U_0(p)=1\quad U_{s+1}(p)=\dfrac{1}{2}p^2\left(1-p^2\right)U'_s(p)+\dfrac{1}{8}\displaystyle\int_0^p dq\left(1-5q^2\right)U_s(q)\\ V_0(p)=1\quad V_s(p)=U_s(p)-p\left(1-p^2\right)\left\{\dfrac{1}{2}U_{s-1}(p)+pU_{s-1}'(p)\right\}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}U_0(p)=1\quad U_1(p)=\dfrac{p}{24}\left(3-5p^2\right)\quad U_2(p)=\dfrac{p^2}{1152}\left(81-462p^2+385p^4\right)\\ U_3(p)=\dfrac{p^3}{414720}\left(30375-369603p^2+765765p^4-425425p^6\right)\ \cdots\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}U_0(p)=1\quad U_1(p)=p\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{5}{24}p^2\right)\quad U_2(p)=p^2\left(\dfrac{9}{128}-\dfrac{77p^2}{192}+\dfrac{385p^4}{1152}\right)\\ U_3(p)=p^3\left(\dfrac{75}{1024}-\dfrac{4563p^2}{5120}+\dfrac{17017p^4}{9216}-\dfrac{85085p^6}{82944}\right)\ \cdots\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}V_0(p)=1\quad V_1(p)=p\left(-\dfrac{3}{8}+\dfrac{7}{24}p^2\right)\quad V_2(p)=p^2\left(-\dfrac{15}{128}+\dfrac{33}{64}p^2-\dfrac{455}{1152}p^4\right)\\ V_3(p)=p\left(-\dfrac{105}{1024}+\dfrac{5577}{5120}p^2-\dfrac{6545}{3072}p^4+\dfrac{95095}{82944}p^6\right)\ \cdots\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}V_0(p)=1\quad V_1(p)=\dfrac{p}{24}\left(-9+7p^2\right)\quad V_2(p)=\dfrac{p^2}{1152}\left(-135+594p^2-455p^4\right)\\ V_3(p)=\dfrac{p^3}{414720}\left(-42525+451737p^2-883575p^4+475475p^6\right)\ \cdots\end{cases}$$

Partant de ces développements prenons maintenant un ordre purement imaginaire ν=iτ, il vient :

$$I_{i\tau}(i\tau\, z)\approx\frac{e^{i\tau\zeta}}{\sqrt{2\pi\, i\tau}}\frac{1}{\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}\sum_{s=0}^{s=+\infty}\frac{U_s(p(z))}{i^s\tau^s}=\frac{e^{i\left(\tau\zeta-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi\tau}}\frac{1}{\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}\left\{\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{U_{2s}(p(z))}{\tau^{2s}}-i\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{U_{2s+1}(p(z))}{\tau^{2s+1}}\right\}$$

$$I_{i\tau}'(\nu\, z)\approx\frac{e^{i\tau\zeta}}{\sqrt{2\pi\, i\tau}}\frac{\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}{z}\sum_{s=0}^{s=+\infty}\frac{V_s(p(z))}{i^s\tau^s}=\frac{e^{i\left(\tau\zeta-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi\tau}}\frac{\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}{z}\left\{\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{V_{2s}(p(z))}{\tau^{2s}}-i\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{V_{2s+1}(p(z))}{\tau^{2s+1}}\right\}$$

$$K_{i\tau}(\nu\, z)\approx\sqrt{\frac{\pi}{2i\tau}}e^{-i\tau\zeta}\frac{1}{\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{U_s(p(z))}{i^s\tau^s}=\sqrt{\frac{\pi}{2\tau}}\frac{e^{-i\left(\tau\zeta+\frac{\pi}{4}\right)}}{\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}\left\{\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{U_{2s}(p(z))}{\tau^{2s}}+i\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{U_{2s+1}(p(z))}{\tau^{2s+1}}\right\}$$

$$K_{i\tau}'(\nu\, z)\approx-\sqrt{\frac{\pi}{2i\tau}}e^{-i\tau\zeta}\frac{\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}{z}\sum_{s=0}^{s=+\infty}\frac{(-1)^sV_s(p(z))}{i^s\tau^s}=\sqrt{\frac{\pi}{2\tau}}e^{-i\left(\tau\zeta+\frac{\pi}{4}\right)}\frac{\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}{z}\left\{\sum_{s=0}^{s=+\infty}\frac{(-1)^sV_{2s}(p(z))}{\tau^{2s}}+i\sum_{s=0}^{s=+\infty}\frac{(-1)^sV_{2s+1}(p(z))}{\tau^{2s+1}}\right\}$$

Et appliquons la formule de connexion avec la fonction de Bessel J :

$$I_\nu(i\, z)=i^\nu J_\nu(z)\Rightarrow I_{i\tau}(i\, z)=i^{i\tau}J_{i\tau}(z)\quad i^{i\tau}=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{i\tau}=e^{-\frac{\pi\tau}{2}}\Rightarrow J_{i\tau}(z)=e^{\frac{\pi\tau}{2}}I_{i\tau}(i\, z)$$

$$I_\nu'(i\, z)=-i\left(i^\nu J_\nu'(z)\right)\Rightarrow I_{i\tau}'(i\, z)=e^{-\frac{i\pi}{2}}e^{-\frac{\pi\tau}{2}}J_{i\tau}'(z)\Rightarrow J_{i\tau}'(z)=e^{\frac{\pi\tau}{2}}e^{\frac{i\pi}{2}}I_{i\tau}'(i\, z)$$

$$J_{i\tau}(\tau\, z)\approx\frac{e^{\frac{\pi\tau}{2}}}{\sqrt{2\pi\tau}}\frac{e^{i\left(\tau\zeta-\frac{\pi}{4}\right)}}{\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}\left\{\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{U_{2s}(p(z))}{\tau^{2s}}-i\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{U_{2s+1}(p(z))}{\tau^{2s+1}}\right\}$$

$$J_{i\tau}'(\tau\, z)\approx\frac{e^{\frac{\pi\tau}{2}}e^{i\left(\tau\zeta-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi\tau}}\frac{\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}{z}\left\{\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{V_{2s+1}(p(z))}{\tau^{2s+1}}+i\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{V_{2s}(p(z))}{\tau^{2s}}\right\}$$

On en déduit les valeurs des parties réelles et imaginaires :

$$\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(\tau\, z)\}\approx\frac{e^{\frac{\pi\tau}{2}}}{\sqrt{2\pi\tau}\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}\left\{Cos\left(\tau\zeta-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{U_{2s}(p(z))}{\tau^{2s}}+Sin\left(\tau\zeta-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{U_{2s+1}(p(z))}{\tau^{2s+1}}\right\}$$

$$\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(\tau\, z)\}\approx\frac{e^{\frac{\pi\tau}{2}}}{\sqrt{2\pi\tau}\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}\left\{Sin\left(\tau\zeta-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{U_{2s}(p(z))}{\tau^{2s}}-Cos\left(\tau\zeta-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{U_{2s+1}(p(z))}{\tau^{2s+1}}\right\}$$

$$\mathrm{Re}\{J_{i\tau}'(\tau\, z)\}\approx\frac{e^{\frac{\pi\tau}{2}}\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}{z\sqrt{2\pi\tau}}\left\{Cos\left(\tau\zeta-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{V_{2s+1}(p(z))}{\tau^{2s+1}}-Sin\left(\tau\zeta-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{V_{2s}(p(z))}{\tau^{2s}}\right\}$$

$$\mathrm{Im}\{J_{i\tau}'(\tau\, z)\}\approx\frac{e^{\frac{\pi\tau}{2}}\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}{z\sqrt{2\pi\tau}}\left\{Sin\left(\tau\zeta-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{V_{2s+1}(p(z))}{\tau^{2s+1}}+Cos\left(\tau\zeta-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{s=0}^{s=+\infty}(-1)^s\frac{V_{2s}(p(z))}{\tau^{2s}}\right\}$$

Pour trouver la première approximation selon un argument purement réel, il suffit de prendre à chaque fois le premier terme du développement pour s=0, soit :

$$\mathrm{Re}(J_{i\tau}(\tau\, z))\approx\sqrt{\frac{1}{2\pi\tau}}e^{\frac{\pi\tau}{2}}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)^{\frac{1}{4}}Cos\left(\tau\zeta-\frac{\pi}{4}\right)\qquad\mathrm{Im}(J_{i\tau}(\tau\, z))\approx\sqrt{\frac{1}{2\pi\tau}}e^{\frac{\pi\tau}{2}}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)^{\frac{1}{4}}Sin\left(\tau\zeta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\mathrm{Re}\{J_{i\tau}'(\tau\, z)\}\approx-\frac{e^{\frac{\pi\tau}{2}}\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}{z\sqrt{2\pi\tau}}Sin\left(\tau\zeta-\frac{\pi}{4}\right)\qquad\mathrm{Im}\{J_{i\tau}'(\tau\, z)\}\approx\frac{e^{\frac{\pi\tau}{2}}\left(1+z^2\right)^{\frac{1}{4}}}{z\sqrt{2\pi\tau}}Cos\left(\tau\zeta-\frac{\pi}{4}\right)$$

Autres développements des fonctions de Bessel pouvant être utilisés dans la zone de transition

En formules 9.3.23 et 9.3.24 de « M.Abramovitz.I.A.Stegun-Handbook of Mathematical Functions », des développement asymptotiques sont données valables dans ce que l'on appelle « la zone de transition » :

$$|Arg(z)| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} J_\nu\left(\nu+\nu^{\frac{1}{3}}z\right) \approx \dfrac{2^{\frac{1}{3}}}{\nu^{\frac{1}{3}}} Ai\left(-2^{\frac{1}{3}}z\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{f_s(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}} + \frac{2^{\frac{2}{3}}}{\nu} Ai'\left(-2^{\frac{1}{3}}z\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{g_s(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}} \\ Y_\nu\left(\nu+\nu^{\frac{1}{3}}z\right) \approx -\left\{\dfrac{2^{\frac{1}{3}}}{\nu^{\frac{1}{3}}} Bi\left(-2^{\frac{1}{3}}z\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{f_s(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}} + \frac{2^{\frac{2}{3}}}{\nu} Bi'\left(-2^{\frac{1}{3}}z\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{g_s(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}}\right\} \\ J_\nu'\left(\nu+\nu^{\frac{1}{3}}z\right) \approx -\dfrac{2^{\frac{2}{3}}}{\nu^{\frac{2}{3}}} Ai'\left(-2^{\frac{1}{3}}z\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{h_s(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}} + \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\nu^{\frac{4}{3}}} Ai\left(-2^{\frac{1}{3}}z\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{l_s(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}} \\ Y_\nu'\left(\nu+\nu^{\frac{1}{3}}z\right) \approx \dfrac{2^{\frac{2}{3}}}{\nu^{\frac{2}{3}}} Bi'\left(-2^{\frac{1}{3}}z\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{h_s(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}} - \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\nu^{\frac{4}{3}}} Bi\left(-2^{\frac{1}{3}}z\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{l_s(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}} \end{cases}$$

$$f_0(z)=1 \quad f_1(z)=-\frac{z}{5} \quad f_2(z)=-\frac{9}{100}z^5+\frac{3}{35}z^2 \quad f_3(z)=\frac{957}{7000}z^6-\frac{173}{3150}z^3-\frac{1}{225}$$

$$f_4(z)=\frac{27}{20000}z^{10}-\frac{23573}{147000}z^7+\frac{5903}{138600}z^4+\frac{947}{346500}z$$

$$g_0(z)=\frac{3}{10}z^2 \quad g_1(z)=-\frac{17}{70}z^3+\frac{1}{70} \quad g_2(z)=-\frac{9}{1000}z^7+\frac{611}{3150}z^4-\frac{37}{3150}z$$

$$g_3(z)=\frac{549}{28000}z^8-\frac{110767}{693000}z^5+\frac{79}{12375}z^2$$

$$h_0(z)=1 \quad h_1(z)=-\frac{4}{5}z \quad h_2(z)=-\frac{9}{100}z^5+\frac{57}{70}z^2 \quad h_3(z)=\frac{699}{3500}z^6-\frac{2617}{3150}z^3+\frac{23}{3150}$$

$$h_4(z)=\frac{27}{20000}z^{10}-\frac{46631}{147000}z^7+\frac{3889}{4620}z^4-\frac{1159}{115500}z$$

$$l_0(z)=\frac{3}{5}z^3-\frac{1}{5} \quad l_1(z)=-\frac{131}{140}z^4+\frac{1}{5}z \quad l_2(z)=-\frac{9}{500}z^8+\frac{5437}{4500}z^5-\frac{593}{3150}z^2$$

$$l_3(z)=\frac{369}{7000}z^9-\frac{999443}{693000}z^6+\frac{31727}{173250}z^3+\frac{947}{346500}$$

D'où l'on tire le développement de la fonction de Hankel H1, en formules 9.3.37 et 9.3.45, l'aide de des deux relations :

$$\begin{cases} H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+iY_\nu(z) \Rightarrow H_\nu^{(1)}(\nu z)=J_\nu(\nu z)+iY_\nu(\nu z) \\ Ai\left(ze^{\pm\frac{2i\pi}{3}}\right)=\dfrac{e^{\pm\frac{i\pi}{3}}}{2}\{Ai(z)\mp iBi(z)\} \Rightarrow Ai(z)\mp iBi(z)=2e^{\mp\frac{i\pi}{3}}Ai\left(ze^{\pm\frac{2i\pi}{3}}\right) \\ \Rightarrow Ai'\left(ze^{\pm\frac{2i\pi}{3}}\right)=\dfrac{e^{\mp\frac{i\pi}{3}}}{2}\{Ai'(z)\mp iBi'(z)\} \Rightarrow Ai'(z)\mp iBi'(z)=2e^{\pm\frac{i\pi}{3}}Ai'\left(ze^{\pm\frac{2i\pi}{3}}\right) \end{cases}.$$

Il vient :

$$Ai\left(-2^{\frac{1}{3}}z\right)-iBi\left(-2^{\frac{1}{3}}z\right)=2e^{-\frac{i\pi}{3}}Ai\left(-2^{\frac{1}{3}}ze^{+\frac{2i\pi}{3}}\right)\quad Ai'\left(-2^{\frac{1}{3}}z\right)-iBi'\left(-2^{\frac{1}{3}}z\right)=2e^{+\frac{i\pi}{3}}Ai'\left(-2^{\frac{1}{3}}ze^{+\frac{2i\pi}{3}}\right)$$

$$\begin{cases} H_\nu^{(1)}\left(\nu+\nu^{\frac{1}{3}}z\right)\approx\dfrac{2^{\frac{4}{3}}e^{-\frac{i\pi}{3}}}{\nu^{\frac{1}{3}}}Ai\left(-2^{\frac{1}{3}}e^{+\frac{2i\pi}{3}}z\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{f_s(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}}+\dfrac{2^{\frac{5}{3}}e^{+\frac{i\pi}{3}}}{\nu}Ai'\left(-2^{\frac{1}{3}}e^{+\frac{2i\pi}{3}}z\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{g_s(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}} \\ H_\nu^{(1)}{}'\left(\nu+\nu^{\frac{1}{3}}z\right)\approx-\dfrac{2^{\frac{5}{3}}e^{+\frac{i\pi}{3}}}{\nu^{\frac{2}{3}}}Ai'\left(-2^{\frac{1}{3}}e^{+\frac{2i\pi}{3}}z\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{h_s(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}}+\dfrac{2^{\frac{4}{3}}e^{-\frac{i\pi}{3}}}{\nu^{\frac{4}{3}}}Ai\left(-2^{\frac{1}{3}}e^{+\frac{2i\pi}{3}}z\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{l_s(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow\begin{cases} H_\nu^{(1)}\left(\nu+\nu^{\frac{1}{3}}z\right)\approx\dfrac{2^{\frac{4}{3}}e^{-\frac{i\pi}{3}}}{\nu^{\frac{1}{3}}}\left\{Ai\left(-2^{\frac{1}{3}}e^{+\frac{2i\pi}{3}}z\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{f_s(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}}+2^{\frac{1}{3}}e^{+\frac{2i\pi}{3}}Ai'\left(-2^{\frac{1}{3}}e^{+\frac{2i\pi}{3}}z\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{g_s(z)}{\nu^{\frac{2(s+1)}{3}}}\right\} \\ H_\nu^{(1)}{}'\left(\nu+\nu^{\frac{1}{3}}z\right)\approx\dfrac{2^{\frac{4}{3}}e^{-\frac{i\pi}{3}}}{\nu^{\frac{2}{3}}}\left\{Ai\left(-2^{\frac{1}{3}}e^{+\frac{2i\pi}{3}}z\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{l_s(z)}{\nu^{\frac{2(s+1)}{3}}}-2^{\frac{1}{3}}e^{\frac{2i\pi}{3}}Ai'\left(-2^{\frac{1}{3}}e^{+\frac{2i\pi}{3}}z\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{h_s(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}}\right\} \end{cases}$$

Par ailleurs un examen des articles originaux de F.W.Olver et E.T.Goodwin montre que ce développement leur est dû et est présenté dans l'article de 1952 F.W.J.Olver.E.T.Goodwin-Some new asymptotic expansions for Bessel functions of Large Order », avec une procédure complète pour la construction des polynômes données. En voici un aperçu :

Tout d'abord est construit autour de zéro le développement de Taylor de la fonction suivante, ainsi que de son inverse (pour construire l'inverse utilisons l'algorithme proposé plus haut) :

$$y=\Phi(x)=\left(6\left(Sinh(x)-x\right)\right)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow\Phi(x)\approx\sum_{s=0}^{+\infty}(-1)^s\mu_s x^{2s+1}\Rightarrow x=\Phi^{-1}(y)\approx\sum_{s=0}^{+\infty}(-1)^s\lambda_s y^{2s+1}$$

Soit $\Phi(x)=y\approx x+\frac{x^3}{60}+\frac{x^5}{8400}+\frac{x^9}{349272000}-\frac{19\,x^{11}}{1816214400000}-\frac{41\,x^{13}}{254270016000000}+\frac{89\,x^{15}}{17683323840000000}$

$$\Rightarrow x=\Phi^{-1}(y)\approx y-\frac{y^3}{60}+\frac{y^5}{1400}-\frac{y^7}{25200}+\frac{43\,y^9}{17248000}-\frac{1213\,y^{11}}{7207200000}+\frac{151439\,y^{13}}{12713500800000}-\frac{33227\,y^{15}}{38118080000000}$$

Puis on envisage l'expansion autour de zéro de la fonction g(x,y) à deux variables x,y suivante :

$$g(x,y)=\frac{3}{20}xy^2\left\{1+\sum_{s=1}^{+\infty}(-1)^{s+1}\frac{20}{3}\lambda_{s+1}y^{2s+1}\right\}\Rightarrow g(x,0)=0\Rightarrow e^{g(x,0)}=1\cdot$$

Le développement de l'exponentielle de cette fonction génère une série de polynôme définis comme suit : $e^{g(x,y)}\approx1+\sum_{s=1}^{+\infty}g_s(x)y^{2s}\Leftrightarrow g_s(x)=\frac{1}{(2n)!}\left.\frac{\partial^{(2n)}e^{g(x,y)}}{\partial y}\right|_{y=0}$

Les expressions successives de ces polynômes sont les suivantes :

$$g_0(x)=1 \quad g_1(x)=\frac{3\,x}{20} \quad g_2(x)=\frac{x}{1400}+\frac{9\,x^2}{800} \quad g_3(x)=-\frac{x}{25200}+\frac{3\,x^2}{28000}+\frac{9\,x^3}{16000}$$

$$g_4(x)=\frac{43x}{17248000}-\frac{67\,x^2}{11760000}+\frac{9\,x^3}{1120000}+\frac{27\,x^4}{1280000}$$

$$g_5(x)=-\frac{1213\,x}{7207200000}+\frac{1073\,x^2}{3104640000}-\frac{x^3}{2450000}+\frac{9\,x^4}{22400000}+\frac{81\,x^5}{128000000}$$

$$g_6(x)=\frac{151439\,x}{12713500800000}-\frac{2883103\,x^2}{127135008000000}+\frac{11521\,x^3}{482944000000}-\frac{61\,x^4}{3136000000}+\frac{27\,x^5}{1792000000}+\frac{81\,x^6}{5120000000}$$

$$g_7(x)=-\frac{33227\,x}{38118080000000}+\frac{166081\,x^2}{105945840000000}-\frac{321721\,x^3}{211891680000000}+\frac{10553\,x^4}{9658880000000}-\frac{87\,x^5}{125440000000}+$$
$$+\frac{81\,x^6}{179200000000}+\frac{243\,x^7}{716800000000}$$

Puis on développe toujours autour de zéros la fonction suivante :

$$x=\Phi^{-1}(y)\approx\sum_{s=0}^{+\infty}(-1)^s\lambda_s y^{2s+1}\Rightarrow\frac{\partial\Phi^{-1}(y)}{\partial y}\approx 1+\sum_{s=1}^{+\infty}(-1)^s(2s+1)\lambda_s y^{2s}\ .$$

$$\Rightarrow\Psi(x,y)=e^{g(x,y)}\frac{\partial\Phi^{-1}(y)}{\partial y}\approx\sum_{s=0}^{+\infty}y^{2s}\sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^{s+r}\lambda_{s,r}x^r$$

Autrement dit les coefficients $\lambda_{s,r}$ sont équivalents (à un signe près) aux coefficients du polynôme à deux variables générés lors du développement autour de zéro sur x et y , en voici une table 8x8 de leurs valeurs, l'indice s est en ligne et r en colonne :

1	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{280}$	$\frac{19}{2800}$	$\frac{9}{800}$	0	0	0	0	0
$\frac{1}{3600}$	$\frac{29}{63\,000}$	$\frac{51}{112\,000}$	$\frac{9}{16\,000}$	0	0	0	0
$\frac{387}{17\,248\,000}$	$\frac{5377}{155\,232\,000}$	$\frac{137}{4\,704\,000}$	$\frac{9}{448\,000}$	$\frac{27}{1\,280\,000}$	0	0	0
$\frac{1213}{655\,200\,000}$	$\frac{275\,713}{100\,900\,800\,000}$	$\frac{32\,783}{15\,523\,200\,000}$	$\frac{47}{39\,200\,000}$	$\frac{117}{179\,200\,000}$	$\frac{81}{128\,000\,000}$	0	0
$\frac{151\,439}{977\,961\,600\,000}$	$\frac{1\,172\,933}{5\,297\,292\,000\,000}$	$\frac{82\,563\,083}{508\,540\,032\,000\,000}$	$\frac{40\,223}{482\,944\,000\,000}$	$\frac{449}{12\,544\,000\,000}$	$\frac{297}{17\,920\,000\,000}$	$\frac{81}{5\,120\,000\,000}$	0
$\frac{99\,681}{7\,623\,616\,000\,000}$	$\frac{15\,781\,021}{864\,518\,054\,400\,000}$	$\frac{468\,773}{36\,324\,288\,000\,000}$	$\frac{2\,635\,951}{423\,783\,360\,000\,000}$	$\frac{5697}{2\,414\,720\,000\,000}$	$\frac{51}{62\,720\,000\,000}$	$\frac{243}{716\,800\,000\,000}$	$\frac{243}{716\,800\,000\,000}$

Ce n'est pas la touche finale de la construction du développement, il y a encore deux étapes ! On introduit le couple de polynômes $\varphi_s(x)$ et $\psi_s(x)$ construit par la règle de récurrence suivante :

$$\varphi_s(x),\psi_s(x)\qquad\begin{cases}\varphi_0(x)=1 & \psi_0(x)=0\\ \varphi_1(x)=0 & \psi_1(x)=-1\\ \varphi_{s+2}(x)=-2x\varphi_s(x)-2s\varphi_{s-1}(x)\\ \psi_{s+2}(x)=-2x\psi_s(x)-2s\psi_{s-1}(x)\end{cases}\ .$$

Dont on donne ici les valeurs jusqu'à l'ordre 12 :

$$\phi s[0,x]=1 \quad \psi s[0,x]=0$$

$$\phi s[1,x]=0 \quad \psi s[1,x]=-1$$

$$\phi s[2,x]=-2\,x \quad \psi s[2,x]=0$$

$$\phi s[3,x]=-2 \quad \psi s[3,x]=2\,x$$

$$\phi s[4,x]=4\,x^2 \quad \psi s[4,x]=4$$

$$\phi s[5,x]=16\,x \quad \psi s[5,x]=-4\,x^2$$

$$\phi s[6,x]=16-8\,x^3 \quad \psi s[6,x]=-24\,x$$

$$\phi s[7,x]=-72\,x^2 \quad \psi s[7,x]=-40+8\,x^3$$

$$\phi s[8,x]=-224\,x+16\,x^4 \quad \psi s[8,x]=96\,x^2$$

$$\phi s[9,x]=-224+256\,x^3 \quad \psi s[9,x]=416\,x-16\,x^4$$

$$\phi s[10,x]=1600\,x^2-32\,x^5 \quad \psi s[10,x]=640-320\,x^3$$

$$\phi s[11,x]=4480\,x-800\,x^4 \quad \psi s[11,x]=-2560\,x^2+32\,x^5$$

$$\phi s[12,x]=4480-8320\,x^3+64\,x^6 \quad \psi s[12,x]=-9600\,x+960\,x^4$$

Et finalement les polynômes du développement en fonction d'Airy sont alors définis comme suit (on reprend les notations de l'article ainsi que les notations d'Abramovitz-Stegun, attention un décalage d'indice pour les polynômes g) :

$$\text{Notation de l'article} \quad A_s(x) \quad B_s(x) \quad \text{Notation Abramovitz} - \text{Stegun} \quad f_s(x) \quad g_s(x)$$

$$A_s(x) = f_s(x) = \sum_{r=0}^{r=s} (-1)^{s+r} f_{s,r} x^r \varphi_{2s+r}(x)$$

$$B_s(x) = g_{s-1}(x) = \sum_{r=0}^{r=s} (-1)^{s+r} f_{s,r} x^r \psi_{2s+r}(x) \Leftarrow g_{-1}(x) = 0$$

Voici donc les 8 premiers polynômes A_s dans les notation de F.W.Olver et E.T.Goodwin :

$$As\tau[0,\tau]=1$$

$$As\tau[1,\tau]=-\frac{\tau}{5}$$

$$As\tau[2,\tau]=\frac{3\,\tau^2}{35}-\frac{9\,\tau^5}{100}$$

$$As\tau[3,\tau]=-\frac{1}{225}-\frac{173\,\tau^3}{3150}+\frac{957\,\tau^6}{7000}$$

$$As\tau[4,\tau]=\frac{947\,\tau}{346\,500}+\frac{5903\,\tau^4}{138\,600}-\frac{23\,573\,\tau^7}{147\,000}+\frac{27\,\tau^{10}}{20\,000}$$

$$As\tau[5,\tau]=-\frac{1169\,\tau^2}{6\,435\,000}-\frac{7\,919\,573\,\tau^5}{225\,225\,000}+\frac{2\,607\,523\,\tau^8}{15\,159\,375}-\frac{13\,599\,\tau^{11}}{3\,500\,000}$$

$$As\tau[6,\tau]=\frac{151\,439}{218\,295\,000}-\frac{3\,405\,497\,\tau^3}{4\,729\,725\,000}+\frac{1\,406\,386\,441\,\tau^6}{47\,297\,250\,000}-\frac{35\,195\,193\,823\,\tau^9}{198\,648\,450\,000}+\frac{353\,879\,\tau^{12}}{49\,000\,000}-\frac{81\,\tau^{15}}{10\,000\,000}$$

$$As\tau[7,\tau]=-\frac{11\,192\,989\,\tau}{18\,555\,075\,000}+\frac{41\,756\,567\,\tau^4}{80\,405\,325\,000}-\frac{20\,572\,983\,247\,\tau^7}{804\,053\,250\,000}+\frac{443\,724\,877\,261\,\tau^{10}}{2\,483\,105\,625\,000}-\frac{104\,040\,477\,\tau^{13}}{9\,432\,500\,000}+\frac{24\,057\,\tau^{16}}{700\,000\,000}$$

Voici donc les 8 premiers polynômes B_s dans les notation de F.W.Olver et E.T.Goodwin :

$$Bs\tau[0,\tau]=0$$

$$Bs\tau[1,\tau]=\frac{3\,\tau^2}{10}$$

$$Bs\tau[2,\tau]=\frac{1}{70}-\frac{17\,\tau^3}{70}$$

$$Bs\tau[3,\tau]=-\frac{37\,\tau}{3150}+\frac{611\,\tau^4}{3150}-\frac{9\,\tau^7}{1000}$$

$$Bs\tau[4,\tau]=\frac{79\,\tau^2}{12\,375}-\frac{110\,767\,\tau^5}{693\,000}+\frac{549\,\tau^8}{28\,000}$$

$$Bs\tau[5,\tau]=-\frac{1213}{1\,023\,750}-\frac{135\,607\,\tau^3}{45\,045\,000}+\frac{3\,822\,058\,\tau^6}{28\,153\,125}-\frac{144\,583\,\tau^9}{4\,900\,000}+\frac{81\,\tau^{12}}{1\,000\,000}$$

$$Bs\tau[6,\tau]=\frac{2\,571\,449\,\tau}{1\,576\,575\,000}+\frac{33\,647\,\tau^4}{22\,050\,000}-\frac{2\,171\,629\,391\,\tau^7}{18\,393\,375\,000}+\frac{143\,750\,963\,\tau^{10}}{3\,773\,000\,000}-\frac{4023\,\tau^{13}}{14\,000\,000}$$

$$Bs\tau[7,\tau]=-\frac{43\,092\,443\,\tau^2}{40\,202\,662\,500}-\frac{257\,600\,243\,\tau^5}{268\,017\,750\,000}+\frac{39\,221\,542\,067\,\tau^8}{375\,224\,850\,000}-\frac{37\,539\,678\,647\,\tau^{11}}{827\,701\,875\,000}+\frac{617\,871\,\tau^{14}}{980\,000\,000}-\frac{243\,\tau^{17}}{700\,000\,000}$$

Pour définir les polynômes servant au développement asymptotique de n'importe quelle dérivée des fonctions de Bessel J et Y, selon la formule (notation de F.W.Olver et E.T.Goodwin) :

$$\left|Arg(z)\right| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} J_\nu^{(m)}\left(\nu + \nu^{\frac{1}{3}} z\right) \approx \dfrac{2^{\frac{1}{3}}}{\nu^{\frac{m+1}{3}}} Ai\left(-2^{\frac{1}{3}} z\right) \displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_s^m(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}} + \frac{2^{\frac{2}{3}}}{\nu^{\frac{m+1}{3}}} Ai'\left(-2^{\frac{1}{3}} z\right) \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{B_s^m(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}} \\ Y_\nu^{(m)}\left(\nu + \nu^{\frac{1}{3}} z\right) \approx -\dfrac{2^{\frac{1}{3}}}{\nu^{\frac{m+1}{3}}} Bi\left(-2^{\frac{1}{3}} z\right) \displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_s^m(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}} - \frac{2^{\frac{2}{3}}}{\nu^{\frac{m+1}{3}}} Bi'\left(-2^{\frac{1}{3}} z\right) \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{B_s^m(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}} \end{cases}.$$

Il suffit de développer la récurrence suivante obtenue par « simple » dérivation :

$$A_s^{m+1}(x) = \frac{dA_s^m(x)}{dx} + 2xB_s^m(x)$$

$$B_s^{m+1}(x) = \frac{dB_s^m(x)}{dx} - A_s^m(x)$$

$$\left.\begin{matrix} Notation\ de\ l'article \\ Notation\ Abramovitz - Stegun \end{matrix}\right\} \quad A_s^1(x) = l_s(x) \quad B_s^1(x) = h_{s-1}(x)$$

Pour ce qui est des dérivées premières, les polynômes repris par Abramovitz-Stegun sont en relation avec les polynômes de F.W.Olver et E.T.Goodwin comme suit :

$$Notation\ de\ l'article \quad A_s^1(x) \quad B_s^1(x) \quad Notation\ Abramovitz - Stegun \quad l_s(x) \quad h_s(x).$$

$$A_s^1(x) = l_{s-1}(x) \qquad B_s^1(x) = -h_s(x)$$

Voici donc les 8 premiers polynômes A^1_s dans les notation de F.W.Olver et E.T.Goodwin

$$As\tau[1,0,\tau] = 0$$

$$As\tau[1,1,\tau] = -\frac{1}{5} + \frac{3\,\tau^3}{5}$$

$$As\tau[1,2,\tau] = \frac{\tau}{5} - \frac{131\,\tau^4}{140}$$

$$As\tau[1,3,\tau] = -\frac{593\,\tau^2}{3150} + \frac{5437\,\tau^5}{4500} - \frac{9\,\tau^8}{500}$$

$$As\tau[1,4,\tau] = \frac{947}{346\,500} + \frac{31\,727\,\tau^3}{173\,250} - \frac{999\,443\,\tau^6}{693\,000} + \frac{369\,\tau^9}{7000}$$

$$As\tau[1,5,\tau] = -\frac{947\,\tau}{346\,500} - \frac{744\,617\,\tau^4}{4\,095\,000} + \frac{324\,691\,204\,\tau^7}{197\,071\,875} - \frac{2\,492\,953\,\tau^{10}}{24\,500\,000} + \frac{81\,\tau^{13}}{500\,000}$$

$$As\tau[1,6,\tau] = \frac{1\,737\,401\,\tau^2}{1\,576\,575\,000} + \frac{238\,407\,341\,\tau^5}{1\,313\,812\,500} - \frac{28\,862\,217\,401\,\tau^8}{15\,765\,750\,000} + \frac{307\,243\,061\,\tau^{11}}{1\,886\,500\,000} - \frac{9747\,\tau^{14}}{14\,000\,000}$$

$$As\tau[1,7,\tau] = -\frac{11\,192\,989}{18\,555\,075\,000} - \frac{222\,646\,\tau^3}{3\,350\,221\,875} - \frac{145\,556\,484\,187\,\tau^6}{804\,053\,250\,000} + \frac{16\,851\,615\,219\,889\,\tau^9}{8\,442\,559\,125\,000} - \frac{110\,722\,017\,961\,\tau^{12}}{472\,972\,500\,000} + \frac{4\,436\,547\,\tau^{15}}{2\,450\,000\,000} - \frac{243\,\tau^{18}}{350\,000\,000}$$

Voici donc les 8 premiers polynômes B^1_s dans les notation de F.W.Olver et E.T.Goodwin :

$$\text{Bs}\tau[1,0,\tau]=-1$$

$$\text{Bs}\tau[1,1,\tau]=\frac{4\,\tau}{5}$$

$$\text{Bs}\tau[1,2,\tau]=-\frac{57\,\tau^2}{70}+\frac{9\,\tau^5}{100}$$

$$\text{Bs}\tau[1,3,\tau]=-\frac{23}{3150}+\frac{2617\,\tau^3}{3150}-\frac{699\,\tau^6}{3500}$$

$$\text{Bs}\tau[1,4,\tau]=\frac{1159\,\tau}{115\,500}-\frac{3889\,\tau^4}{4620}+\frac{46\,631\,\tau^7}{147\,000}-\frac{27\,\tau^{10}}{20\,000}$$

$$\text{Bs}\tau[1,5,\tau]=-\frac{199\,319\,\tau^2}{22\,522\,500}+\frac{191\,378\,357\,\tau^5}{225\,225\,000}-\frac{212\,264\,189\,\tau^8}{485\,100\,000}+\frac{17\,001\,\tau^{11}}{3\,500\,000}$$

$$\text{Bs}\tau[1,6,\tau]=\frac{604\,523}{644\,962\,500}+\frac{32\,274\,623\,\tau^3}{4\,729\,725\,000}-\frac{40\,495\,715\,479\,\tau^6}{47\,297\,250\,000}+\frac{44\,352\,030\,337\,\tau^9}{79\,459\,380\,000}-\frac{1\,073\,851\,\tau^{12}}{98\,000\,000}+\frac{81\,\tau^{15}}{10\,000\,000}$$

$$\text{Bs}\tau[1,7,\tau]=-\frac{371\,600\,459\,\tau}{241\,215\,975\,000}-\frac{856\,313\,863\,\tau^4}{160\,810\,650\,000}+\frac{4\,850\,595\,930\,769\,\tau^7}{5\,628\,372\,750\,000}-\frac{420\,633\,568\,153\,\tau^{10}}{620\,776\,406\,250}+\frac{749\,194\,377\,\tau^{13}}{37\,730\,000\,000}-\frac{7047\,\tau^{16}}{175\,000\,000}$$

C'est ainsi que l'on peut générer par une construction non moins compliquée que pour le premier développement les polynômes servants de base aux développement asymptotique proposé.

Utilisation de ces développements pour trouver les zéros de la fonction Bessel-K et de sa dérivée

Ces deux développement ont le mérite de se rendre compte que pour pratiquement l'ensemble des valeurs de l'ordre τ, c'est le premier terme du développement qui domine, soit :

$$\left.\begin{aligned} K_{i\tau}(\tau z) &\approx \frac{\pi e^{-\frac{\tau\pi}{2}}\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) \\ K_{i\tau}'(\tau z) &\approx \frac{\pi e^{-\frac{\tau\pi}{2}}\sqrt{2}}{z\tau^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}} Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) \end{aligned}\right\} \quad \zeta=\zeta(z) \quad \textit{tel que} \quad \frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}} = Log\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)-\sqrt{1-z^2}\cdot$$

Autrement dit pour trouver l'expression des zéros en première approximation (et c'est même une bonne approximation), il suffit d'annuler la fonction d'Airy et de sa dérivée première ! C'est exactement sur cette base que Dunster donne l'expression approchée des zéros de la fonction Bessel-K d'ordre imaginaire. Il suffit d'écrire en sachant que z est nécessairement sur l'axe réel :

$$k_{\tau,n} \text{ zéros de } K_{i\tau}(\tau x) \approx Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta(x)\right)=0 \qquad k'_{\tau,n} \text{ zéros de } K_{i\tau}'(\tau x) \approx Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta(x)\right)=0\cdot$$

On prend indifféremment les deux fonctions ζ(x) selon que l'argument est inférieur ou supérieur à τ :

$$\zeta(x)=\left[\frac{3}{2}\left(Log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)-\sqrt{1-x^2}\right)\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$\zeta(x)=\left[\frac{3}{2}\left(\sqrt{x^2-1}-ArcCos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]^{\frac{2}{3}}$$

, sachant que les développements sont l'exacte opposé l'un de l'autre.

Pour trouver les valeurs approchés on considère que l'on développe les zéros autour d'une valeur dans l'espace des variables ζ proches de zéros et donc x proche de 1. Une fois trouvé la va leur en ζ (triviale) on revient à la valeur z par le développement inverse. C'est là que peut intervenir un problème tout simple : connaissant le développement de Taylor jusqu'à un ordre définie pour une fonction comment peut-t-on déterminer le développement de Taylor de la fonction inverse. C'est évidemment par l'intermédiaire soit de la formule bien connue d'inversion de Lagrange (que je n'ai pas testé et n'ai pas calculé) mais par l'intermédiaire d'un algorithme particulièrement astucieux et facile à mettre en œuvre sous Mathematica. Il est du à M.Itskov.R.Dargazany.K.Hornes dans une publication de 2011 « Taylor expansion of the inverse function ».

Soit très simplement :

Connu $y=f(x)$ *n fois dérivable en* $x=x_0$

Supposons $x=f^{-1}(y)=g(y)$ *également n fois dérivable en* $y=y_0$

Posons $y_n=\left.\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=x_0} \qquad x_n=\left.\dfrac{d^n g(y)}{dy^n}\right|_{y=y_0}$

Soit $P_{j,k}$ *coefficient calculé la récurrence suivante*

$$\forall j=1,2,\cdots \quad P_{j,j}=y_1^{\,j} \quad \forall j,k \quad \mathrm{k>j} \quad k=j+1,j+2,\cdots \quad P_{j,k}=\frac{1}{(k-j)y_1}\sum_{l=1}^{k-j}\frac{(l\times j-k+j+l)y_{l+1}}{(l+1)!}P_{j,k-l}$$

Alors $x_n=-\dfrac{n}{y_1^{\,n}}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\frac{x_j}{j!}P_{j,n}$ *au passage égalité bien connue* $x_1=\dfrac{1}{y_1}$

Avec cet algorithme on a donc supposé un développement et l'on obtient son développement inverse :

$$y(x) \approx \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{(x-x_0)^j}{j!} \Leftrightarrow x(y) \approx \sum_{j=0}^{n} x_j \frac{(y-y_0)^j}{j!}.$$

Appliquons ce court algorithme pour calculer le développement inverse de x en fonction de ζ, il vient (il suffit de changer ζ en – ζ pour passer de l'un à l'autre, il sont de part et d'autre de la valeur x=1) :

$$\varsigma(x) = \left(\frac{3}{2}\left\{Log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) - \sqrt{1-x^2}\right\}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$x(\varsigma) = \left\{\begin{aligned} &1 - \frac{\varsigma}{2^{\frac{1}{3}}} + \frac{3\varsigma^2}{10\times 2^{\frac{1}{3}}} + \frac{\varsigma^3}{700} - \frac{479\varsigma^4}{126000\times 2^{\frac{1}{3}}} - \frac{20231\varsigma^5}{16170000\times 2^{\frac{2}{3}}} - \frac{171389\varsigma^6}{4204200000} + \\ &+ \frac{203448767\varsigma^7}{3972969000000\times 2^{\frac{1}{3}}} + \frac{4236299281\varsigma^8}{180107928000000\times 2^{\frac{2}{3}}} + \frac{750913741013\varsigma^9}{627375949200000000} \end{aligned}\right\}.$$

$$\varsigma(x) = \left(\frac{3}{2}\left\{\sqrt{x^2-1} - ArcSec(x)\right\}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$x(\varsigma) \approx \left\{\begin{aligned} &1 + \frac{\varsigma}{2^{\frac{1}{3}}} - \frac{3\varsigma^2}{10\times 2^{\frac{1}{3}}} - \frac{\varsigma^3}{700} + \frac{479\varsigma^4}{126000\times 2^{\frac{1}{3}}} + \frac{20231\varsigma^5}{16170000\times 2^{\frac{2}{3}}} + \frac{171389\varsigma^6}{4204200000} - \\ &- \frac{203448767\varsigma^7}{3972969000000\times 2^{\frac{1}{3}}} - \frac{4236299281\varsigma^8}{180107928000000\times 2^{\frac{2}{3}}} - \frac{750913741013\varsigma^9}{627375949200000000} \end{aligned}\right\}$$

Il vient indifféremment des deux développements la même estimation des zéros de la fonction K et de sa dérivée :

$$-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{k_{\tau,n}}{\tau}\right) \approx a_n \Rightarrow \zeta\left(\frac{k_{\tau,n}}{\tau}\right) \approx -\tau^{-\frac{2}{3}} a_n \Rightarrow k_{\tau,n} \approx \tau\zeta^{-1}\left(-\tau^{-\frac{2}{3}} a_n\right)$$

$$-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\left(\frac{k'_{\tau,n}}{\tau}\right) \approx a'_n \Rightarrow \zeta\left(\frac{k'_{\tau,n}}{\tau}\right) \approx -\tau^{-\frac{2}{3}} a'_n \Rightarrow k'_{\tau,n} \approx \tau\zeta^{-1}\left(-\tau^{-\frac{2}{3}} a'_n\right)$$

a_n *zéros tel que* $Ai(a_n) = 0$ a'_n *zéros tel que* $Ai'(a'_n) = 0$

En appliquant l'argument dans la fonction inverse, il vient :

$$k_{\tau,n} \approx \left\{ \begin{array}{l} \tau + \dfrac{a_n}{2^{\frac{1}{3}}}\tau^{\frac{1}{3}} + \dfrac{3\,a_n^{\;2}}{10\times 2^{\frac{2}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}} \underbrace{- \dfrac{a_n^{\;3}}{700\,\tau} - \dfrac{479\,a_n^{\;4}}{126000\times 2^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{5}{3}}} + \dfrac{20231\,a_n^{\;5}}{16170000\times 2^{\frac{2}{3}}\tau^{\frac{7}{3}}} - \dfrac{171389\,a_n^{\;6}}{4204200000\,\tau^{3}} -}_{correction\ nécessaire} \\ \underbrace{- \dfrac{203448767\,a_n^{\;7}}{3972969000000\times 2^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{11}{3}}} + \dfrac{4236299281\,a_n^{\;8}}{180107928000000\times 2^{\frac{2}{3}}\tau^{\frac{13}{3}}} - \dfrac{750913741013\,a_n^{\;9}}{627375949200000000\,\tau^{5}}}_{correction\ nécessaire} \end{array} \right\}$$

$$k'_{\tau,n} \approx \left\{ \begin{array}{l} \tau + \dfrac{a'_n}{2^{\frac{1}{3}}}\tau^{\frac{1}{3}} + \dfrac{3\,a'^{\;2}_n}{10\times 2^{\frac{2}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}} \underbrace{- \dfrac{a'^{\;3}_n}{700\,\tau} - \dfrac{479\,a'^{\;4}_n}{126000\times 2^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{5}{3}}} + \dfrac{20231\,a'^{\;5}_n}{16170000\times 2^{\frac{2}{3}}\tau^{\frac{7}{3}}} - \dfrac{171389\,a'^{\;6}_n}{4204200000\,\tau^{3}} -}_{correction\ nécessaire} \\ \underbrace{- \dfrac{203448767\,a'^{\;7}_n}{3972969000000\times 2^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{11}{3}}} + \dfrac{4236299281\,a'^{\;8}_n}{180107928000000\times 2^{\frac{2}{3}}\tau^{\frac{13}{3}}} - \dfrac{750913741013\,a'^{\;9}_n}{627375949200000000\,\tau^{5}}}_{correction\ nécessaire} \end{array} \right\}.$$

a_n *zéros tel que* $Ai(a_n) = 0$ $\quad a'_n$ *zéros tel que* $Ai'(a'_n) = 0$

En réalité ce développement n'est valable qu'au 3ème terme, comme indiqué plus haut, et nécessite une correction à partir du 4ème, car dans ce cas il faut prendre des termes additionnels du développement initial pour résoudre de manière approchée l'équation transcendantale. En prenant pour la fonction Bessel-K le premier terme additionnel d'ordre inférieur en τ et ne retenant que le terme τ nécessaire, il vient :

$$K_{i\tau}(\tau\, z) \approx \frac{\pi\, e^{-\frac{\tau\pi}{2}}\sqrt{2}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\zeta}{z^2-1}\right)^{\frac{1}{4}} \left\{ Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) + \frac{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}} B_0(\zeta) \right\} \quad Zéros\ de\ Airy \Rightarrow Ai(a_n) = Ai''(a_n) = 0$$

$$\Rightarrow Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) + \frac{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}} B_0(\zeta) = 0 \quad Or \quad Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) \approx \left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta - a_n\right) Ai'(a_n) \quad Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right) \approx Ai'(a_n)$$

$$\Rightarrow \left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta - a_n\right) + \frac{B_0(\zeta)}{\tau^{\frac{4}{3}}} = 0 \Rightarrow \zeta = -a_n\tau^{-\frac{2}{3}} + B_0(\zeta)\tau^{-2} = -a_n\tau^{-\frac{2}{3}} + B_0(\zeta)\tau^{-\frac{6}{3}}$$

$$Equation\ transcendentale \Rightarrow \zeta \approx -a_n\tau^{-\frac{2}{3}} + B_0(\zeta)\tau^{-\frac{6}{3}}$$

$$Posons \quad \eta = \tau^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \zeta \approx -a_n\eta + B_0(\zeta)\eta^3$$

.

Cette approximation permet de calculer deux termes supplémentaires en développant l'expression B_0 comme suit :

$$\left.\begin{aligned} &B_0(\zeta)=B_0(\zeta\,,p(x(\zeta)))2=-\frac{5}{48\zeta^2}+p(x)\frac{\left(5p(x)^2-3\right)}{24\sqrt{\zeta}} \\ &p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}\right\}\Rightarrow B_0(\zeta)\approx\frac{1}{35\times 2^{\frac{2}{3}}}+\frac{2\zeta}{225}+\underbrace{\frac{69\times 2^{\frac{2}{3}}}{67375}\zeta^2}_{non\ nécessaire}$$

$$Equation\ transcendantale \Rightarrow \zeta\approx -a_n\eta+B_0(\zeta)\eta^3$$

$$Solution\ cherchée\quad \zeta=A\eta+B\eta^3\Rightarrow A\eta+B\eta^3\approx -a_n\eta+\eta^3B_0\left(A\eta+B\eta^3\right)$$

$$Or\quad B_0\left(A\eta+B\eta^3\right)\approx\frac{1}{35\times 2^{\frac{2}{3}}}+\frac{2\left(A\eta+B\eta^3\right)}{225}\Rightarrow \eta^3B_0\left(A\eta+B\eta^3\right)\approx\frac{\eta^3}{35\times 2^{\frac{2}{3}}}+\underbrace{\frac{2\eta^3\left(A\eta+B\eta^3\right)}{225}}_{à\ écarter\ en\ \eta^4}$$

$$\Rightarrow \eta^3B_0\left(A\eta+B\eta^3\right)\approx\eta^3B_0(A\eta)\Rightarrow A=-a_n\quad et\quad B=B_0(-a_n\eta)\Rightarrow \zeta\approx -a_n\eta+\eta^3B_0(-a_n\eta)$$

$$\Rightarrow \zeta\approx -a_n\tau^{-\frac{2}{3}}+\frac{B_0\left(-a_n\tau^{-\frac{2}{3}}\right)}{\tau^2}\Rightarrow k_{\tau,n}\approx\tau\zeta^{-1}\left(-a_n\tau^{-\frac{2}{3}}+\frac{B_0\left(-a_n\tau^{-\frac{2}{3}}\right)}{\tau^2}\right)$$

$$\Rightarrow k_{\tau,n}\approx\tau+\frac{a_n}{2^{\frac{1}{3}}}\tau^{\frac{1}{3}}+\frac{3a_n^2}{10\times 2^{\frac{2}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}}-\frac{a_n^3+10}{700\tau}-\frac{479a_n^4-40}{126000\times 2^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{5}{3}}}=\tau+\frac{a_n\tau^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}+\frac{3a_n^2\tau^{-\frac{1}{3}}}{10\times 2^{\frac{2}{3}}}-\frac{\left(a_n^3+10\right)\tau^{-\frac{3}{3}}}{700}-\frac{\left(479a_n^4-40\right)\tau^{-\frac{5}{3}}}{126000\times 2^{\frac{1}{3}}}$$

Dans ce petit calcul il faut commenter un peu la méthode : le terme B_0 n'est pas développé au delà de ζ, le terme en ζ^2 ne rajoute pas de terme dans l'expression finale en puissance inverse de τ. La solution approchée de l'équation transcendantale ne nécessite que d'injecter le premier terme en $\tau^{-2/3}$ dans B_0 car le terme en ζ du développement de B_0 génère un terme de puissance supplémentaire, donc à négliger. Le détail du calcul est donné juste avant.

Pour la dérivée première, le développement initial prend la forme suivante en développant l'expression C_0 :

$$K_{i\tau}'(\tau z) \approx \frac{\pi e^{-\frac{\tau\pi}{2}}\sqrt{2}}{z\tau^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{\zeta}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{-\frac{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{2}{3}}}C_0(\zeta)+Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)D_0(\zeta)\right\}$$

$$\Rightarrow D_0(\zeta)=1 \quad C_0(\zeta)=\frac{7}{48\zeta}-p(x)\sqrt{\zeta}\,\frac{\left(7p(x)^2-9\right)}{24} \quad Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\approx\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta-a_n\right)Ai''(a_n)$$

$$Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\approx Ai(a'_n) \quad Ai''(a'_n)=a'_n\,Ai(a'_n) \quad Ai'(a'_n)=0$$

$$\text{Equation transcendantale} \Rightarrow \left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta-a'_n\right)a'_n\,Ai(a'_n)-\frac{Ai(a'_n)}{\tau^{\frac{2}{3}}}C_0(\zeta)=0 \Rightarrow \tau^{\frac{2}{3}}\zeta=-a'_n-\frac{C_0(\zeta)}{a'_n\,\tau^{\frac{2}{3}}}$$

$$\Rightarrow \zeta=-a'_n\,\tau^{-\frac{2}{3}}-\frac{C_0(\zeta)}{a'_n\,\tau^{\frac{4}{3}}} \Rightarrow \zeta=-a'_n\,\tau^{-\frac{2}{3}}-\frac{C_0\left(-a'_n\,\tau^{-\frac{2}{3}}\right)}{a'_n\,\tau^{\frac{4}{3}}}$$

$$C_0(\zeta)=\frac{7}{48\zeta}-p(x)\sqrt{\zeta}\,\frac{\left(7p(x)^2-9\right)}{24}\approx\frac{1}{5\times 2^{\frac{2}{3}}}+\frac{\zeta}{25\times 2^{\frac{2}{3}}} \qquad k'_{\tau,n}\approx\tau\zeta^{-1}\left(-a'_n\,\tau^{-\frac{2}{3}}-\frac{C_0\left(-a'_n\,\tau^{-\frac{2}{3}}\right)}{a'_n\,\tau^{\frac{4}{3}}}\right)$$

$$\Rightarrow k'_{\tau,n}\approx\tau+\frac{a'_n}{2^{\frac{1}{3}}}\tau^{\frac{1}{3}}+\frac{3\,a'^{\,2}_n}{10\times 2^{\frac{2}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}}-\frac{a'^{\,3}_n+70\times 2^{\frac{1}{3}}}{700\tau}-\frac{\left(479\,a'^{\,4}_n+5040\times 2^{\frac{1}{3}}a'_n\right)}{126000\times 2^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{5}{3}}}$$

Sauf qu'en réalité on va voir que de tels calculs sont en fait erroné, même en affinant l'estimation de la solution de l'équation transcendantale sur un ordre infinitésimal donné. En effet pour pousser encore plus loin, il faut prendre à chaque fois le terme supplémentaire du développement en fonction de Airy. C'est là que l'on peut introduire une propriété intéressante et peu souvent utilisée des fonctions de Airy, à savoir l'expression littérale du développement limité autour des zéros des ces mêmes fonctions. Revenons aux développements initiaux et ne retenons que l'équation transcendantale approchée qui peut en découler pour la fonction Bessel-K ou sa dérivée :

$$\begin{cases} Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{A_s(\zeta)}{\tau^{2s}}+\frac{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{B_s(\zeta)}{\tau^{2s}}=0 \\ Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{D_s(\zeta)}{\tau^{2s}}-\frac{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{2}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{C_s(\zeta)}{\tau^{2s}}=0 \end{cases}.$$

Une propriété connue des dérivées n-ième des fonctions de Airy découle de leur équation différentielle du second degré et permet d'exprimer ces dérivées comme combinaison linéaire polynomiale de la fonction de Airy et de sa dérivée : $\frac{d^n Ai(z)}{dz^n} = Ai^{(n)}(z) = P_n(z)Ai(z) + Q_n(z)Ai'(z)$.

Les deux polynômes P et Q ont reçu plutôt récemment le nom de polynômes d'Abramochkin (voir 2018 E.G.ABRAMOCHKIN et E.V.RAZUEVA « Higher Derivatives of Airy Functions and of their Products ») Non que les auteur en soi les réels découvreurs, mais ceux qui en ont lancé une étude plus approfondie. Ces polynômes se développent suivant la récurrence suivante :

$$\begin{cases} P_0(z) = 1 \quad Q_0(z) = 0 \\ P_{n+1}(z) = \frac{dP_n(z)}{dz} + zQ_n(z) \Rightarrow \begin{cases} P_{n+2}(z) = zP_n(z) + nP_{n-1}(z) \\ Q_{n+2}(z) = zQ_n(z) + nQ_{n-1}(z) \end{cases} \\ Q_{n+1}(z) = \frac{dQ_n(z)}{dz} + P_n(z) \end{cases}.$$

$$\text{Tableau} \quad \begin{matrix} P_0(z) = 1 & Q_0(z) = 0 \\ P_1(z) = 0 & Q_1(z) = 1 \\ P_2(z) = z & Q_2(z) = 0 \\ P_3(z) = 1 & Q_3(z) = z \\ P_4(z) = z^2 & Q_4(z) = 2 \end{matrix}$$

Il s'ensuit que le développement de Taylor autour d'un zéro quelconque de la fonction d'Airy a la forme suivante qui permet de factoriser complètement le terme dérivée première de la fonction d'Airy :

$$Ai(z) \approx \sum_{l=0}^{l=m} Ai^{(l)}(a_n)\frac{(z-a_n)^l}{l!} \qquad Ai'(z) \approx \sum_{l=1}^{l=m+1} Ai^{(l)}(a_n)\frac{l(z-a_n)^{l-1}}{l!} = \sum_{l=1}^{l=m+1} Ai^{(l)}(a_n)\frac{(z-a_n)^{l-1}}{(l-1)!} = \sum_{l=0}^{l=m} Ai^{(l+1)}(a_n)\frac{(z-a_n)^l}{l!}$$

$$Ai(z) \approx \sum_{l=0}^{l=m} \{P_l(a_n)Ai(a_n) + Q_l(a_n)Ai'(a_n)\}\frac{(z-a_n)^l}{l!} \Leftarrow Ai(a_n) = 0$$

$$\approx Ai'(a_n)\sum_{l=0}^{l=m} Q_l(a_n)\frac{(z-a_n)^l}{l!} \Rightarrow Ai'(z) \approx Ai'(a_n)\sum_{l=0}^{l=m} Q_{l+1}(a_n)\frac{(z-a_n)^l}{l!}$$

Pour un développement limité autour d'un zéro de la dérivée première de la fonction d'Airy, il vient :

$$Ai(z) \approx \sum_{l=0}^{l=m} Ai^{(l)}(a'_n)\frac{(z-a'_n)^l}{l!} \approx \sum_{l=0}^{l=m} \{P_l(a'_n)Ai(a'_n) + Q_l(a_n)Ai'(a'_n)\}\frac{(z-a_n)^l}{l!} \Leftarrow Ai'(a'_n) = 0$$

$$Ai(z) \approx Ai(a'_n)\sum_{l=0}^{l=m} P_l(a'_n)\frac{(z-a'_n)^l}{l!} \Rightarrow Ai'(z) \approx Ai(a'_n)\sum_{l=0}^{l=m} P_{l+1}(a'_n)\frac{(z-a'_n)^l}{l!}.$$

Imaginons que l'on développe l'équation transcendantale à un ordre τ^{2l} donné, autour de la valeur du zéro a_n de la fonction d'Airy, il vient, après un changement adéquat de variable :

$$Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{A_s(\zeta)}{\tau^{2s}}+\frac{Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{B_s(\zeta)}{\tau^{2s}}=0 \quad Posons \quad y=-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta \quad \eta=\tau^{-\frac{2}{3}}\Rightarrow y=-\frac{\zeta}{\eta} \quad a_n\to a$$

$$(1)\Rightarrow Ai\left(-\frac{\zeta}{\eta}\right)\sum_{s=0}^{s=l}(-1)^s A_s(\zeta)\eta^{3s}+\eta^2 Ai'\left(-\frac{\zeta}{\eta}\right)\sum_{s=0}^{s=l}(-1)^s B_s(\zeta)\eta^{3s}=0$$

$$Ai(y)\approx Ai'(a)\sum_{k=0}^{k=m}Q_k(a)\frac{\left(-\frac{\zeta}{\eta}-a\right)^k}{k!} \quad Ai'(y)\approx Ai'(a)\sum_{k=0}^{k=m}Q_{k+1}(a)\frac{\left(-\frac{\zeta}{\eta}-a\right)^k}{k!}$$

$$(1)\Rightarrow\left\{\sum_{k=0}^{k=m}Q_k(a)\frac{\left(-\frac{\zeta}{\eta}-a\right)^k}{k!}\right\}\left\{\sum_{s=0}^{s=l}(-1)^s A_s(\zeta)\eta^{3s}\right\}+\eta^2\left\{\sum_{k=0}^{k=m}Q_{k+1}(a)\frac{\left(-\frac{\zeta}{\eta}-a\right)^k}{k!}\right\}\left\{\sum_{s=0}^{s=l}(-1)^s B_s(\zeta)\eta^{3s}\right\}=0$$

$$Posons \quad A_l(\zeta,\eta)=\sum_{s=0}^{s=l}(-1)^s A_s(\zeta)\eta^{3s} \quad B_l(\zeta,\eta)=\sum_{s=0}^{s=l}(-1)^s B_s(\zeta)\eta^{3s}$$

$$(1)\Rightarrow\left\{\sum_{k=0}^{k=m}Q_k(a)\frac{\left(-\frac{\zeta}{\eta}-a\right)^k}{k!}\right\}A_l(\zeta,\eta)+\eta^2\left\{\sum_{k=0}^{k=m}Q_{k+1}(a)\frac{\left(-\frac{\zeta}{\eta}-a\right)^k}{k!}\right\}B_l(\zeta,\eta)=0$$

$$(1)\Rightarrow\left\{\sum_{k=0}^{k=m}Q_k(a)(-1)^k\frac{(\zeta+a\eta)^k}{\eta^k k!}\right\}A_l(\zeta,\eta)+\eta^2\left\{\sum_{k=0}^{k=m}Q_{k+1}(a)(-1)^k\frac{(\zeta+a\eta)^k}{\eta^k k!}\right\}B_l(\zeta,\eta)=0$$

$$(1)\Rightarrow\left\{\sum_{k=0}^{k=m}Q_k(a)(-1)^k\eta^{m-k}\frac{(\zeta+a\eta)^k}{k!}\right\}A_l(\zeta,\eta)+\eta^2\left\{\sum_{k=0}^{k=m}Q_{k+1}(a)(-1)^k\eta^{m-k}\frac{(\zeta+a\eta)^k}{k!}\right\}B_l(\zeta,\eta)=0$$

Pour ce qui est de l'équation transcendantale de la dérivée première, il vient :

$$Ai'\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{D_s(\zeta)}{\tau^{2s}}-\frac{Ai\left(-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{\tau^{\frac{2}{3}}}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{C_s(\zeta)}{\tau^{2s}}=0 \quad Posons \quad y=-\tau^{\frac{2}{3}}\zeta \quad \eta=\tau^{-\frac{2}{3}}\Rightarrow y=-\frac{\zeta}{\eta} \quad a'_n\to a$$

$$(1)\Rightarrow Ai'\left(-\frac{\zeta}{\eta}\right)\sum_{s=0}^{s=l}(-1)^s D_s(\zeta)\eta^{3s}-\eta Ai\left(-\frac{\zeta}{\eta}\right)\sum_{s=0}^{s=l}(-1)^s C_s(\zeta)\eta^{3s}=0$$

$$Ai\left(-\frac{\zeta}{\eta}\right)\approx Ai(a)\sum_{k=0}^{k=m}P_k(a)\frac{\left(-\frac{\zeta}{\eta}-a\right)^k}{k!}\Rightarrow Ai'\left(-\frac{\zeta}{\eta}\right)\approx Ai(a)\sum_{k=0}^{k=m-1}P_{k+1}(a)\frac{\left(-\frac{\zeta}{\eta}-a\right)^k}{k!}$$

$$(1)\Rightarrow\left\{\sum_{k=0}^{k=m}P_{k+1}(a)\frac{\left(-\frac{\zeta}{\eta}-a\right)^k}{k!}\right\}\left\{\sum_{s=0}^{s=l}(-1)^s D_s(\zeta)\eta^{3s}\right\}-\eta\left\{\sum_{k=0}^{k=m}P_k(a)\frac{\left(-\frac{\zeta}{\eta}-a\right)^k}{k!}\right\}\left\{\sum_{s=0}^{s=l}(-1)^s C_s(\zeta)\eta^{3s}\right\}=0$$

$$Posons \quad D_l(\zeta,\eta)=\sum_{s=0}^{s=l}(-1)^s D_s(\zeta)\eta^{3s} \quad C_l(\zeta,\eta)=\sum_{s=0}^{s=l}(-1)^s C_s(\zeta)\eta^{3s}$$

$$(1)\Rightarrow\left\{\sum_{k=0}^{k=m}P_{k+1}(a)\frac{\left(-\frac{\zeta}{\eta}-a\right)^k}{k!}\right\}D_l(\zeta,\eta)-\eta\left\{\sum_{k=0}^{k=m}P_k(a)\frac{\left(-\frac{\zeta}{\eta}-a\right)^k}{k!}\right\}C_l(\zeta,\eta)=0$$

$$(1)\Rightarrow\left\{\sum_{k=0}^{k=m}P_{k+1}(a)(-1)^k\frac{(\zeta+a\eta)^k}{\eta^k k!}\right\}D_l(\zeta,\eta)-\eta\left\{\sum_{k=0}^{k=m}P_k(a)(-1)^k\frac{(\zeta+a\eta)^k}{\eta^k k!}\right\}C_l(\zeta,\eta)=0$$

$$(1)\Rightarrow\left\{\sum_{k=0}^{k=m}P_{k+1}(a)(-1)^k\eta^{m-k}\frac{(\zeta+a\eta)^k}{k!}\right\}D_l(\zeta,\eta)-\eta\left\{\sum_{k=0}^{k=m}P_k(a)(-1)^k\eta^{m-k}\frac{(\zeta+a\eta)^k}{k!}\right\}C_l(\zeta,\eta)=0$$

.

Avec cette formulation on retrouve les équations transcendantales précédentes :

$$Ordre \quad \zeta,\eta \Rightarrow m=1 \quad l=0 \Rightarrow \left(-\frac{\zeta}{\eta}-a\right)A_0(\zeta,\eta)=0 \Rightarrow \zeta=-a\eta$$

$$Ordre \quad \zeta^3,\eta^3 \Rightarrow m=3 \quad l=1$$

$$\left\{\sum_{k=0}^{k=3} Q_{k+1}(a)(-1)^k \eta^{3-k}\frac{(\zeta+a\eta)^k}{k!}\right\}=\eta^3+a\eta\frac{(\zeta+a\eta)^2}{2}-\frac{(\zeta+a\eta)^3}{3} \Leftarrow \begin{cases} Q_0(a)=Q_2(a)=0 \\ Q_1(a)=1 \\ Q_3(a)=a \quad Q_4(a)=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1) \quad \left\{\eta^2(\zeta+a\eta)+a\frac{(\zeta+a\eta)^3}{6}\right\}A_1(\zeta,\eta)=\eta^2\left\{\eta^3+a\eta\frac{(\zeta+a\eta)^2}{2}-\frac{(\zeta+a\eta)^3}{3}\right\}B_1(\zeta,\eta)$$

Sélection des seuls termes en ζ^3,η^3

$$(1)\Rightarrow\left\{\eta^2(\zeta+a\eta)+a\frac{(\zeta+a\eta)^3}{6}\right\}A_1(\zeta,\eta)=\eta^2\left\{a\eta\frac{\zeta^2}{2}-\frac{\zeta^3+3\zeta^2a\eta}{3}\right\}B_1(\zeta,\eta)$$

$$A_1(\zeta,\eta)=1-\eta^3A_1(\zeta)\Rightarrow\eta^2(\zeta+a\eta)A_1(\zeta,\eta)\approx\eta^2(\zeta+a\eta)$$

$$B_1(\zeta,\eta)=B_0(\zeta)-\eta^3B_1(\zeta)\Rightarrow\eta^2B_1(\zeta,\eta)\approx\eta^2B_0(\zeta) \quad B_0(\zeta)\approx\frac{1}{35\times2^{\frac{2}{3}}}+\frac{2\zeta}{225}$$

.

$$(1)\Rightarrow\left\{\eta^2(\zeta+a\eta)+a\frac{(\zeta+a\eta)^3}{6}\left(1-\eta^3A_1(\zeta)\right)\right\}+\eta^2\zeta^2\left\{\frac{a\eta}{2}+\frac{\zeta}{3}\right\}B_0(\zeta)=0$$

$$\zeta^2B_0(\zeta)\approx\frac{\zeta^2}{35\times2^{\frac{2}{3}}}+\frac{2\zeta^3}{225} \quad \zeta^3B_0(\zeta)\approx\frac{\zeta^3}{35\times2^{\frac{2}{3}}} \quad \eta^3\zeta^3A_1(\zeta)\approx-\frac{\eta^3\zeta^3}{225}$$

$$(1)\Rightarrow\left\{\eta^2(\zeta+a\eta)+a\frac{\left(\zeta^3+a^3\eta^3+3\zeta^2a\eta+3\zeta a^2\eta^2\right)}{6}\left(1-\eta^3A_1(\zeta)\right)\right\}+\eta^2\left\{\frac{a\eta}{2}\zeta^2B_0(\zeta)+\frac{\zeta^3}{105\times2^{\frac{2}{3}}}\right\}=0$$

$$(1)\Rightarrow\eta^2(\zeta+a\eta)+a\frac{\left(\zeta^3+a^3\eta^3+3\zeta^2a\eta+3\zeta a^2\eta^2\right)}{6}+\frac{7\eta^3\zeta^3a}{1350}+\frac{a\eta^3\zeta^2}{70\times2^{\frac{2}{3}}}+\frac{\eta^2\zeta^3}{105\times2^{\frac{2}{3}}}=0$$

$$(1)\Rightarrow\zeta\eta^2+\frac{\zeta a^3\eta^2}{2}+a\eta^3+\frac{a^4\eta^3}{6}+\frac{a\zeta^3}{6}+\frac{\eta^2\zeta^3}{105\times2^{\frac{2}{3}}}+\frac{7\eta^3a\zeta^3}{1350}+\frac{\zeta^2a^2\eta}{2}+\frac{a\eta^3\zeta^2}{70\times2^{\frac{2}{3}}}=0$$

$$(1)\Rightarrow\zeta\eta^2\left(1+\frac{a^3}{2}\right)+a\eta^3\left(1+\frac{a^3}{6}\right)+\zeta^3\left\{\frac{a}{6}+\frac{\eta^2}{105\times2^{\frac{2}{3}}}+\frac{7\eta^3a}{1350}\right\}+\zeta^2\left\{\frac{a^2\eta}{2}+\frac{a\eta^3}{70\times2^{\frac{2}{3}}}\right\}=0$$

Sur cette dernière forme d'équation algébrique on intègre la forme cherchée :

$$\zeta=A(1)\eta+A(2)\eta^2+A(3)\eta^3\Rightarrow\zeta^2=A(1)^2\eta^2+2A(1)A(2)\eta^3 \quad \zeta^3=A(1)^3\eta^3$$

$$\Rightarrow\zeta\eta^2=A(1)\eta^3 \quad \zeta^2\eta=A(1)^2\eta^3 \quad \zeta^3\eta^2=0 \quad \zeta^3\eta^3=0$$

$$(1)\Rightarrow A(1)\eta^3\left(1+\frac{a^3}{2}\right)+a\eta^3\left(1+\frac{a^3}{6}\right)+A(1)^3\eta^3\frac{a}{6}+A(1)^2\eta^3\frac{a^2}{2}=0\Rightarrow A(2)=A(3)=0\Rightarrow(A(1)+a)\left(aA(1)^2+2a^2A(1)+a^3+6\right)=0$$

Par évidence on a A(1)=-a, donc une solution identique obtenue par le développement à l'ordre 1. Si l'on tente de développer à des ordres plus important, grâce à Mathematica, on tombe invariablement sur le cas trivial de départ. Donc par cette méthode on ne peut obtenir que l'approximation des zéros par l'inversion de la fonction ζ *:*

$$A(1)=-a \quad A(2)=0 \quad A(3)=0\Rightarrow\zeta=-a\eta\Rightarrow k_{\tau,n}\approx\tau\zeta^{-1}\left(-\tau^{-\frac{2}{3}}a_n\right).$$

C'est la même conclusion pour la dérivée première :

$$Ordre\quad \zeta,\eta \Rightarrow m=1 \quad l=0 \Rightarrow -P_2(a)(\zeta+a\eta)D_0(\zeta,\eta)=0 \Rightarrow \zeta=-a\eta$$

$$Ordre\quad \zeta^2,\eta^2 \Rightarrow m=2 \quad l=1$$

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=2} P_{k+1}(a)(-1)^k \eta^{2-k}\frac{(\zeta+a\eta)^k}{k!} = -a\eta(\zeta+a\eta)+\frac{(\zeta+a\eta)^2}{2} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{k=m} P_k(a)(-1)^k \eta^{m-k}\frac{(\zeta+a\eta)^k}{k!} = \eta^2+a\frac{(\zeta+a\eta)^2}{2}\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}P_0(a)=1 \quad P_1(a)=0 \quad P_2(a)=a \\ P_3(a)=1 \quad P_4(a)=a^2\end{cases}$$

$$D_l(\zeta,\eta)=\sum_{s=0}^{s=l}(-1)^s D_s(\zeta)\eta^{3s} \quad C_l(\zeta,\eta)=\sum_{s=0}^{s=l}(-1)^s C_s(\zeta)\eta^{3s}$$

$$D_1(\zeta,\eta)\approx D_0(\zeta)\approx 1 \quad C_1(\zeta,\eta)\approx C_0(\zeta)\approx \frac{1}{5\times 2^{\frac{1}{3}}}+\frac{\zeta}{25\times 2^{\frac{2}{3}}}-\frac{26\zeta^2}{7875}$$

$$\Rightarrow \left\{-a\eta(\zeta+a\eta)+\frac{(\zeta+a\eta)^2}{2}\right\}D_0(\zeta)-\eta\left\{\eta^2+a\frac{(\zeta+a\eta)^2}{2}\right\}C_0(\zeta)=0$$

$$\text{Sélection des seuls termes en } \zeta^2,\eta^2 \Rightarrow (\zeta+a\eta)\left(\frac{(\zeta-a\eta)}{2}D_0(\zeta)-\eta a\frac{(\zeta+a\eta)}{2}C_0(\zeta)\right)=0$$

$$\Rightarrow (\zeta+a\eta)\left((\zeta-a\eta)-\eta a(\zeta+a\eta)\left(\frac{1}{5\times 2^{\frac{1}{3}}}+\frac{\zeta}{25\times 2^{\frac{2}{3}}}\right)\right)=(\zeta+a\eta)\left(\zeta-a\eta-\frac{a\eta}{25\times 2^{\frac{1}{3}}}\left(5\zeta+5a\eta+\frac{\zeta^2+a\zeta\eta}{2^{\frac{1}{3}}}\right)\right)=0$$

$$\zeta^2-a^2\eta^2-\frac{5\left(\zeta^2 a\eta+2\zeta a^2\eta^2\right)+2^{\frac{2}{3}}\zeta^2a^2\eta^2}{25\times 2^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow \zeta^2-a^2\eta^2-\frac{2^{\frac{2}{3}}\zeta a^2\eta^2}{5}-\frac{\zeta^2 a\eta}{5\times 2^{\frac{1}{3}}}-\frac{2^{\frac{1}{3}}a^2\eta^2\zeta^2}{25}=0$$

$$Si\quad \zeta=A(1)\eta+A(2)\eta^2 \Rightarrow \zeta^2=A(1)^2\eta^2 \quad \zeta\eta^2=\zeta^2\eta=\zeta^2\eta^2=0 \Rightarrow \zeta^2-a^2\eta^2=0 \Rightarrow \zeta=\pm a\eta$$

La solution ζ=+aη n'est pas possible car la variable ζ est positive et le zéro a de la dérivée première de la fonction d'Airy est négatif. Il ne reste donc plus que la solution ζ=-aη. On peut calculer avec Mathematica même à des ordres infinitésimaux plus grand que l'on tombe invariablement sur cette même approximation de la solution de l'équation transcendantale. L'approximation des zéros de la dérivée première de la fonction de Bessel K d'ordre imaginaire par l'inversion de la fonction ζ :

$$\Rightarrow \zeta=-a\eta \Rightarrow k'_{\tau,n}\approx \tau\zeta^{-1}\left(-\tau^{-\frac{2}{3}}a'_n\right).$$

<u>Utilisation du développement dans la zone de transition pour déterminer les zéros de la fonction de Hankel</u>

Là encore la position des zéros de la fonction de Hankel est déterminée par les positions des zéros de la fonction d'Airy ou de sa dérivée première. Dans l'hypothèse où l'ordre v est grand, alors on peut développer l'équation transcendantale selon les puissances négative de l'ordre v. En tirant partie des polynômes d'Abramochkin pour développer autour des zéros de la fonction d 'Airy, il vient :

$$H_\nu^{(1)}\left(\nu+\nu^{\frac{1}{3}}z\right)=0\Rightarrow Ai\left(-2^{\frac{1}{3}}e^{+\frac{2i\pi}{3}}z\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{f_s(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}}+2^{\frac{1}{3}}e^{+\frac{2i\pi}{3}}Ai'\left(-2^{\frac{1}{3}}e^{+\frac{2i\pi}{3}}z\right)\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{g_s(z)}{\nu^{\frac{2(s+1)}{3}}}=0$$

Posons $y=-2^{\frac{1}{3}}e^{+\frac{2i\pi}{3}}z$ *développons autour de* $y=a_n$

$$Ai(y)\approx Ai'(a_n)\sum_{k=0}^{k=m}Q_k(a_n)\frac{(y-a_n)^k}{k!}\quad Ai'(y)\approx Ai'(a_n)\sum_{k=0}^{k=m}Q_{k+1}(a_n)\frac{(y-a_n)^k}{k!}.$$

$$\Rightarrow\left\{Ai'(a_n)\sum_{k=0}^{k=m}Q_k(a_n)\frac{(y-a_n)^k}{k!}\right\}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{f_s(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}}+2^{\frac{1}{3}}e^{+\frac{2i\pi}{3}}\left\{Ai'(a_n)\sum_{k=0}^{k=m}Q_{k+1}(a_n)\frac{(y-a_n)^k}{k!}\right\}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{g_s(z)}{\nu^{\frac{2(s+1)}{3}}}=0$$

$$\Rightarrow\left\{\sum_{k=0}^{k=m}Q_k(a_n)\frac{(y-a_n)^k}{k!}\right\}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{f_s(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}}+2^{\frac{1}{3}}e^{+\frac{2i\pi}{3}}\left\{\sum_{k=0}^{k=m}Q_{k+1}(a_n)\frac{(y-a_n)^k}{k!}\right\}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{g_s(z)}{\nu^{\frac{2(s+1)}{3}}}=0$$

Au premier ordre de puissance négative de v, il vient :

$$m=1\quad s=1\Rightarrow(y-a_n)\left\{f_0(z)+\frac{f_1(z)}{\nu^{\frac{2}{3}}}\right\}+2^{\frac{1}{3}}e^{+\frac{2i\pi}{3}}\frac{1}{\nu^{\frac{2}{3}}}g_0(z)=0$$

$$f_0(z)=1\quad f_1(z)=-\frac{z}{5}\quad g_0(z)=\frac{3}{10}z^2\Rightarrow(y-a_n)\approx 2^{\frac{1}{3}}e^{+\frac{2i\pi}{3}}\frac{g_0(z)}{\nu^{\frac{2}{3}}}\left\{f_0(z)-\frac{f_1(z)}{\nu^{\frac{2}{3}}}\right\}.$$

$$\Rightarrow(y-a_n)\approx 2^{\frac{1}{3}}e^{+\frac{2i\pi}{3}}\frac{g_0(z)f_0(z)}{\nu^{\frac{2}{3}}}\Rightarrow y=a_n-2^{\frac{1}{3}}e^{+\frac{2i\pi}{3}}\frac{3}{10}\frac{z^2}{\nu^{\frac{2}{3}}}$$

Comme $z=-2^{-\frac{1}{3}}e^{-\frac{2i\pi}{3}}y\Rightarrow z^2=2^{-\frac{2}{3}}e^{-\frac{4i\pi}{3}}y^2\Rightarrow y=a_n-2^{-\frac{1}{3}}e^{-\frac{2i\pi}{3}}\frac{3}{10}\frac{y^2}{\nu^{\frac{2}{3}}}\Rightarrow y\approx a_n-2^{-\frac{1}{3}}e^{-\frac{2i\pi}{3}}\frac{3}{10}a_n^2\nu^{-\frac{2}{3}}$

Au deuxième ordre de puissance négative de v et en réalisant un changement de variable sur l'ordre v pour faire apparaître un puissance positive d'une variable τ, il vient :

$$\text{Posons} \quad \tau = \nu^{-\frac{2}{3}} \quad x = y - a_n \Rightarrow z = -2^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} y = -2^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} (x + a_n) \quad a_n \to a$$

$$m = 2 \quad s = 2 \Rightarrow x\{f_0(z) + \tau f_1(z) + \tau^2 f_2(z)\} + 2^{\frac{1}{3}} e^{+\frac{2i\pi}{3}} \{\tau g_0(z) + \tau^2 g_1(z)\} = 0$$

$$f_0(z) = 1 \quad f_1(z) = -\frac{z}{5} \quad f_2(z) = -\frac{9}{100} z^5 + \frac{3}{35} z^2 \quad g_0(z) = \frac{3}{10} z^2 \quad g_1(z) = -\frac{17}{70} z^3 + \frac{1}{70}$$

Et ne retenant que les termes en τ^2 *maximum et grâce à Mathematica*

$$\{\tau A_{01} + \tau^2 A_{02}\} + x\{A_{10} + \tau A_{11} + \tau^2 A_{12}\} + x^2\{\tau A_{21} + \tau^2 A_{22}\} = 0$$

$$A_{01} = \frac{3a^2 e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{10 \times 2^{\frac{1}{3}}} \quad A_{02} = \frac{2 + 17a^3}{70 \times 2^{\frac{2}{3}}} e^{\frac{2i\pi}{3}} \quad A_{10} = 1 \quad A_{11} = \frac{2}{5} 2^{\frac{2}{3}} a e^{-\frac{2i\pi}{3}} \quad A_{12} = \frac{3a^2(380 + 21a^3)}{1400 \times 2^{\frac{2}{3}}} e^{-\frac{4i\pi}{3}}$$

$$A_{21} = \frac{e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{2 \times 2^{\frac{1}{3}}} \quad A_{22} = \frac{9a(4 + a^3)}{40 \times 2^{\frac{2}{3}}} e^{-\frac{4i\pi}{3}} \Rightarrow A_{01} A_{11} = \frac{12a^3}{50 \times 2^{\frac{2}{3}}} e^{\frac{2i\pi}{3}} = \frac{12a^3}{50 \times 2^{\frac{2}{3}}} e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Forme recherchée $\quad x = A(1)\tau + A(2)\tau^2 \Rightarrow$ *système d'équations algébriques par élimination des termes* τ^{3+}

$$\{\tau A_{01} + \tau^2 A_{02}\} + \{A(1)\tau + A(2)\tau^2\}\{A_{10} + \tau A_{11} + \tau^2 A_{12}\} + \{A(1)\tau + A(2)\tau^2\}^2 \{\tau A_{21} + \tau^2 A_{22}\}$$

$$\Rightarrow \{\tau A_{01} + \tau^2 A_{02}\} + \{A(1)\tau + A(2)\tau^2\}\{A_{10} + \tau A_{11}\} = 0$$

$$\Rightarrow \{\tau A_{01} + \tau^2 A_{02}\} + \tau\{A(1)A_{10} + \tau A(1) A_{11} + A(2)\tau A_{10}\} = 0$$

$$\Rightarrow A_{01} + A(1)A_{10} + \tau A_{02} + \tau A(1) A_{11} + \tau A(2) A_{10} = 0$$

$$\begin{cases} A(1)A_{10} + A_{01} = 0 \Rightarrow A(1) = -A_{01} = -\dfrac{3a^2 e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{10 \times 2^{\frac{1}{3}}} \\ A_{02} + A(1) A_{11} + A(2)A_{10} = 0 \Rightarrow A(2) = -A_{02} + A_{01} A_{11} = e^{\frac{2i\pi}{3}} \left(\dfrac{12a^3}{50 \times 2^{\frac{2}{3}}} - \dfrac{2 + 17a^3}{70 \times 2^{\frac{2}{3}}} \right) \\ \Rightarrow A(2) = e^{\frac{2i\pi}{3}} \dfrac{7 \times 12a^3 - 5(2 + 17a^3)}{350 \times 2^{\frac{2}{3}}} = -e^{\frac{2i\pi}{3}} \dfrac{a^3 + 10}{350 \times 2^{\frac{2}{3}}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = a_n + x \approx a_n - 2^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} \frac{3}{10} a_n^2 \nu^{-\frac{2}{3}} - e^{\frac{2i\pi}{3}} 2^{\frac{1}{3}} \frac{a^3 + 10}{700} \nu^{-\frac{4}{3}}$$

.

Aux ordres supérieurs formalisons l'équation transcendantale avec les nouvelles variables pour lesquelles on développe autour de la valeur zéro :

$$\text{Développement à l'ordre } m \quad \text{avec} \quad a_n \to a \qquad x = y - a_n \qquad z = -2^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} (x+a) \quad \tau = \nu^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \nu^{-\frac{2s}{3}} = \tau^s$$

$$\Rightarrow \left\{ \sum_{k=0}^{k=m} Q_k(a) \frac{x^k}{k!} \right\} \left\{ \sum_{s=0}^{s=m} \tau^s f_s(x,a) \right\} + 2^{\frac{1}{3}} e^{+\frac{2i\pi}{3}} \left\{ \sum_{k=0}^{k=m} Q_{k+1}(a) \frac{x^k}{k!} \right\} \left\{ \sum_{s=0}^{s=m-1} \tau^{s+1} g_s(x,a) \right\} = 0$$

Restreints aux ordres donnés, il vient l'annulation formelle d'un polynôme à deux variables en x et τ (en général les ordres d'approximations sont les mêmes). Puis on suppose que la variable est un polynôme en τ à l'ordre donné dont les inconnus sont les coefficients. On injecte cette forme dans l'équation transcendantale en éliminant les termes d'ordre τ supérieurs à un ordre donné. Chaque terme du polynôme obtenu est alors annulé, ce qui conduit à un système d'équations algébriques sur les inconnus (système polynomial sur les coefficients inconnus) qui peut par exemple se résoudre facilement avec Mathematica. Le choix de l'ordre du développement est guidé par la stabilité obtenue des solutions du système d'équation algébriques. En général seuls les coefficients d'ordre les plus élevés se modifient au fur et à mesure que l'ordre d'approximation augmente. Dès que la valeur devient stable, c'est la bonne valeur à retenir.

Comme on ne dispose que d'un nombre limité de valeurs des fonctions f et g, on ne peut développer que jusqu'à un certain ordre (en l'occurrence à l'ordre 4 avec les données d'Abramovitz et Stegun) en τ :

$$x = A(1)\tau + A(2)\tau^2 + A(3)\tau^3 + A(4)\tau^4 \quad \tau = \nu^{-\frac{2}{3}}$$

$$A(1) = -\frac{3a^2 e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{10 \times 2^{\frac{1}{3}}} \quad A(2) = -e^{\frac{2i\pi}{3}} \frac{a^3+10}{350 \times 2^{\frac{2}{3}}} = -e^{\frac{2i\pi}{3}} 2^{\frac{1}{3}} \frac{a^3+10}{700}$$

$$A(3) = \frac{a(479a^3-40)}{126000} \quad A(4) = e^{-\frac{2i\pi}{3}} 2^{-\frac{1}{3}} \frac{a^2(20231a^3+55100)}{16170000}$$

$$\Rightarrow y = a + x \approx a - 2^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} \frac{3}{10} a^2 \nu^{-\frac{2}{3}} - e^{\frac{2i\pi}{3}} 2^{\frac{1}{3}} \frac{a^3+10}{700} \nu^{-\frac{4}{3}} + \frac{a(479a^3-40)}{126000} \nu^{-\frac{6}{3}} + e^{-\frac{2i\pi}{3}} \frac{a^2(20231a^3+55100)}{16170000} \nu^{-\frac{8}{3}}$$

$$\text{Comme} \quad \text{zéros} \quad k_n \approx \nu + \nu^{\frac{1}{3}} z \quad \text{et} \quad z = -2^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} y \quad a \to a_n \Rightarrow k_n \approx \nu - \nu^{\frac{1}{3}} 2^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} y$$

$$\Rightarrow k_n \approx \nu - \left\{ \begin{array}{l} a\nu^{\frac{1}{3}} 2^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} - 2^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{4i\pi}{3}} \frac{3}{10} a^2 \nu^{-\frac{1}{3}} - \frac{a^3+10}{700} \nu^{-1} + 2^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} \frac{a(479a^3-40)}{126000} \nu^{-\frac{5}{3}} + \\ + 2^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{4i\pi}{3}} \frac{a^2(20231a^3+55100)}{16170000} \nu^{-\frac{7}{3}} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow k_n \approx \left\{ \begin{array}{l} \nu - 2^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} a_n \nu^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}} e^{\frac{2i\pi}{3}} \frac{3}{10} a_n^2 \nu^{-\frac{1}{3}} + {\frac{a_n^3+10}{700}}^{-\frac{4}{3}} \nu^{-1} - 2^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} \frac{a_n(479a_n^3-40)}{126000} \nu^{-\frac{5}{3}} - \\ - 2^{-\frac{2}{3}} e^{\frac{2i\pi}{3}} \frac{a_n^2(20231a_n^3+55100)}{16170000} \nu^{-\frac{7}{3}} \end{array} \right\}$$

Le résultat trouvé confirme ceux de l'article de 2008 de E.M.Fereira et J.Sesma : « Zeros of the Macdonald function of complex order ». Par contre le développement asymptotique choisi exclu de pouvoir estimer justement les zéros de la fonction Bessel-K lorsque l'ordre est purement imaginaires.

Poussé à l'ordre 6 le calcul donne :

$$x = A(1)\tau + A(2)\tau^2 + A(3)\tau^3 + A(4)\tau^4 + A(5)\tau^5 + A(6)\tau^6$$

$$A(1) = -\frac{3a^2 e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{10\times 2^{\frac{1}{3}}} \quad A(2) = -e^{\frac{2i\pi}{3}} 2^{\frac{1}{3}} \frac{a^3+10}{700} \quad A(3) = \frac{a\left(479a^3-40\right)}{126000}$$

$$A(4) = e^{-\frac{2i\pi}{3}} 2^{-\frac{1}{3}} \frac{a^2\left(20231a^3+55100\right)}{16170000} \quad A(5) = e^{\frac{2i\pi}{3}} 2^{-\frac{2}{3}} \frac{\left(4990920+3045800a^3+171389a^6\right)}{2102100000}.$$

$$A(6) = \frac{a\left(-2530188760+346348450a^3+203448767a^6\right)}{3972969000000}$$

$$\Rightarrow k_n \approx \nu - 2^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} \nu^{\frac{1}{3}} \left(a + A(1)\nu^{-\frac{2}{3}} + A(2)\nu^{-\frac{4}{3}} + A(3)\nu^{-\frac{6}{3}} + A(4)\nu^{-\frac{8}{3}} + A(5)\nu^{-\frac{10}{3}} + A(6)\nu^{-\frac{12}{3}} \right)$$

Pour la dérivée première c'est exactement le même processus de construction et ici a représente le zéro de la dérivée première de la fonction d'Airy Ai.

$$H_\nu^{(1)\prime}\left(\nu + \nu^{\frac{1}{3}} z\right) \approx \frac{2^{\frac{4}{3}} e^{-\frac{i\pi}{3}}}{\nu^{\frac{2}{3}}} \left\{ Ai\left(-2^{\frac{1}{3}} e^{+\frac{2i\pi}{3}} z\right) \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{l_s(z)}{\nu^{\frac{2(s+1)}{3}}} - 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2i\pi}{3}} Ai'\left(-2^{\frac{1}{3}} e^{+\frac{2i\pi}{3}} z\right) \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{h_s(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}} \right\}$$

$$H_\nu^{(1)}\left(\nu + \nu^{\frac{1}{3}} z\right) = 0 \Rightarrow Ai\left(-2^{\frac{1}{3}} e^{+\frac{2i\pi}{3}} z\right) \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{l_s(z)}{\nu^{\frac{2(s+1)}{3}}} - 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2i\pi}{3}} Ai'\left(-2^{\frac{1}{3}} e^{+\frac{2i\pi}{3}} z\right) \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{h_s(z)}{\nu^{\frac{2s}{3}}}$$

$$a \text{ zéro de } Ai'(y) \qquad x = y - a \qquad z = -2^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} y = -2^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} (x+a) \quad \tau = \nu^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \nu^{-\frac{2s}{3}} = \tau^s$$

$$Ai(y) \approx Ai(a) \sum_{k=0}^{k=m} P_k(a) \frac{(y-a)^k}{k!} \quad Ai'(y) \approx Ai(a) \sum_{k=0}^{k=m} P_{k+1}(a) \frac{(y-a)^k}{k!} \quad l_s(z) \to l_s(x,a) \quad h_s(z) \to h_s(x,a)$$

$$\Rightarrow \left\{ \sum_{k=0}^{k=m} P_k(a) \frac{x^k}{k!} \right\} \left\{ \sum_{s=0}^{s=m-1} \tau^{s+1} l_s(x,a) \right\} - 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2i\pi}{3}} \left\{ \sum_{k=0}^{k=m} P_{k+1}(a) \frac{x^k}{k!} \right\} \left\{ \sum_{s=0}^{s=m} \tau^s h_s(x,a) \right\}$$

Cela conduit à l'approximation suivante des zéros de la dérivée première de la fonction de Hankel :

$$x = A(1)\tau + A(2)\tau^2 + A(3)\tau^3 + A(4)\tau^4 + A(5)\tau^5 + A(6)\tau^6 \quad \tau = \nu^{-\frac{2}{3}}$$

$$A(1) = -e^{-\frac{2i\pi}{3}} \frac{2+3a^2}{10\times a\times 2^{\frac{1}{3}}} \quad A(2) = -e^{\frac{2i\pi}{3}} 2^{-\frac{2}{3}} \frac{7-28a^3+a^6}{350\times a^3} \quad A(3) = \frac{-252-168a^3+2036a^6+479a^9}{126000\times a^5}$$

$$A(4) = e^{-\frac{2i\pi}{3}} 2^{-\frac{1}{3}} \frac{-24255-22638a^3+70210a^6-91280a^9+60693a^{12}}{48510000\times a^7}$$

$$A(5) = e^{\frac{2i\pi}{3}} 2^{-\frac{2}{3}} \frac{-1471470-1765764a^3+5622344a^6-10246600a^9-37117550a^{12}+856945a^{15}}{10510500000\times a^9}.$$

$$A(6) = -\frac{\left\{ \begin{array}{l} 417161745+611837226a^3-1725420879a^6-1286833002a^9+ \\ +7770296275a^{12}+9046186940a^{15}+1017243835a^{18} \end{array} \right\}}{19864845000000\times a^{11}}$$

$$Et \quad k'_n \approx \nu - \nu^{\frac{1}{3}} 2^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} \left(a + A(1)\tau + A(2)\tau^2 + A(3)\tau^3 + A(4)\tau^4 + A(5)\tau^5 + A(6)\tau^6\right)$$

$$\Rightarrow k'_n \approx \nu - 2^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} \nu^{\frac{1}{3}} \left(a + A(1)\nu^{-\frac{2}{3}} + A(2)\nu^{-\frac{4}{3}} + A(3)\nu^{-\frac{6}{3}} + A(4)\nu^{-\frac{8}{3}} + A(5)\nu^{-\frac{10}{3}} + A(6)\nu^{-\frac{12}{3}} \right)$$

<u>Zéros en argument de la dérivée première de la fonction de Bessel K d'ordre purement imaginaire</u>

<u>Premier cas : l'ordre est purement imaginaire</u>

La fonction K-Bessel possède le développement en série valable partout sur le plan complexe

$$K_{i\tau}(z) = -\left(\frac{\tau\pi}{Sinh(\tau\pi)}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} \frac{Sin\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right) - \Phi_{\tau,l}\right)}{l!\sqrt{\tau^2\left(1+\tau^2\right)\cdots\left(l^2+\tau^2\right)}} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l}$$

$$\Rightarrow K_{i\tau}'(z) = -\left(\frac{\tau\pi}{Sinh(\tau\pi)}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{z} \left\{ \tau \sum_{l=0}^{l=+\infty} \frac{Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right) - \Phi_{\tau,l}\right)}{l!\sqrt{\tau^2\left(1+\tau^2\right)\cdots\left(l^2+\tau^2\right)}} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l} + 2\sum_{l=1}^{l=+\infty} \frac{Sin\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right) - \Phi_{\tau,l}\right)}{(l-1)!\sqrt{\tau^2\left(1+\tau^2\right)\cdots\left(l^2+\tau^2\right)}} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l} \right\}$$

<u>Zéros lorsque z <<1 : en première approximation</u>

$$Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right) - \Phi_{\tau,0}\right) = 0 \Rightarrow \tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \pm n\pi + \Phi_{\tau,0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Log(z) = \dfrac{-n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \Phi_{\tau,0}}{\tau} + Log(2) \Rightarrow z \to x_n \approx 2e^{\frac{1}{\tau}\left(\Phi_{\tau,0} + \frac{\pi}{2} - n\pi\right)} \\ Arg(z) = 0 \quad z \in \mathbf{R} \end{cases}.$$

<u>Zéros lorsque z <<1 : en deuxième approximation</u> : prenons les deux premiers termes du développement :

$$\nu = i\tau \quad \Phi_{\tau,l} = Arg(\Gamma(1+l+i\tau)) = \frac{1}{2i} Log\left(\frac{\Gamma(1+l+i\tau)}{\Gamma(1+l-i\tau)}\right)$$

$$\Phi_{\tau,1} = \frac{1}{2i} Log\left(\frac{\Gamma(2+i\tau)}{\Gamma(2-i\tau)}\right) = \frac{1}{2i} Log\left(\frac{(1+i\tau)}{(1-i\tau)}\frac{\Gamma(1+i\tau)}{\Gamma(1-i\tau)}\right) = \Phi_{\tau,0} + Arg(1+i\tau)$$

$$\tau\left\{\frac{Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right) - \Phi_{\tau,0}\right)}{\sqrt{\tau^2}} + \frac{Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right) - \Phi_{\tau,1}\right)}{\sqrt{\tau^2(1+\tau^2)}}\frac{z^2}{4}\right\} + 2\frac{z^2}{4}\frac{Sin\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right) - \Phi_{\tau,1}\right)}{\sqrt{\tau^2(1+\tau^2)}} = 0$$

$$\Rightarrow Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right) - \Phi_{\tau,0}\right) + \frac{z^2}{4}\frac{Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right) - \Phi_{\tau,1}\right)}{\sqrt{(1+\tau^2)}} + \frac{z^2}{2}\frac{Sin\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right) - \Phi_{\tau,1}\right)}{\tau\sqrt{(1+\tau^2)}} = 0 \quad .$$

$$\left\{\begin{array}{l} Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\right)Cos(\Phi_{\tau,0}) + Sin\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\right)Sin(\Phi_{\tau,0}) + \\ + \frac{z^2}{4}\frac{Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\right)Cos(\Phi_{\tau,1}) + Sin\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\right)Sin(\Phi_{\tau,1})}{\sqrt{(1+\tau^2)}} + \\ + \frac{z^2}{2}\frac{Sin\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\right)Cos(\Phi_{\tau,1}) - Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\right)Sin(\Phi_{\tau,1})}{\tau\sqrt{(1+\tau^2)}} \end{array}\right\} = 0$$

Continuons le calcul :

$$\left\{\begin{array}{l} Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\right)\left\{Cos(\Phi_{\tau,0})+\frac{z^2}{4\sqrt{(1+\tau^2)}}Cos(\Phi_{\tau,1})-\frac{z^2}{2\tau\sqrt{(1+\tau^2)}}Sin(\Phi_{\tau,1})\right\}+ \\ Sin\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\right)\left\{Sin(\Phi_{\tau,0})+\frac{z^2}{4\sqrt{(1+\tau^2)}}Sin(\Phi_{\tau,1})+\frac{z^2}{2\tau\sqrt{(1+\tau^2)}}Cos(\Phi_{\tau,1})\right\} \end{array}\right\}=0$$

$$\Rightarrow Tan\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\right)=-\frac{Cos(\Phi_{\tau,0})}{Sin(\Phi_{\tau,0})}\frac{1+\frac{z^2}{4\tau\sqrt{(1+\tau^2)}}\frac{\{\tau\, Cos(\Phi_{\tau,1})-2Sin(\Phi_{\tau,1})\}}{Cos(\Phi_{\tau,0})}}{1+\frac{z^2}{4\tau\sqrt{(1+\tau^2)}}\frac{\{\tau\, Sin(\Phi_{\tau,1})+2Cos(\Phi_{\tau,1})\}}{Sin(\Phi_{\tau,0})}}$$

$$\Rightarrow Tan\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\right)=-\frac{Cos(\Phi_{\tau,0})}{Sin(\Phi_{\tau,0})}\left\{1+\frac{z^2}{4\tau\sqrt{(1+\tau^2)}}\left[\frac{\tau\, Cos(\Phi_{\tau,1})-2Sin(\Phi_{\tau,1})}{Cos(\Phi_{\tau,0})}-\frac{\tau\, Sin(\Phi_{\tau,1})+2Cos(\Phi_{\tau,1})}{Sin(\Phi_{\tau,0})}\right]\right\}$$

$$\Rightarrow Tan\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\right)=-\frac{Cos(\Phi_{\tau,0})}{Sin(\Phi_{\tau,0})}\left\{1-\frac{z^2[\tau\, Sin(\Phi_{\tau,1}-\Phi_{\tau,0})+2Cos(\Phi_{\tau,1}-\Phi_{\tau,0})]}{4\tau\sqrt{(1+\tau^2)}Cos(\Phi_{\tau,0})Sin(\Phi_{\tau,0})}\right\}$$

$$\Rightarrow Tan\left(\tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\right)=-\frac{Cos(\Phi_{\tau,0})}{Sin(\Phi_{\tau,0})}+\frac{z^2[\tau\, Sin(\Phi_{\tau,1}-\Phi_{\tau,0})+2Cos(\Phi_{\tau,1}-\Phi_{\tau,0})]}{4\tau\sqrt{(1+\tau^2)}Sin^2(\Phi_{\tau,0})}$$

$$ArcTan\left(-X_0+\frac{z^2}{4\sqrt{(1+\tau^2)}}X_1\right)\approx -ArcTan(X_0)+\frac{z^2}{4\tau\sqrt{(1+\tau^2)}}\frac{X_1}{(1+X_0{}^2)}\quad X_0=\frac{Cos(\Phi_{\tau,0})}{Sin(\Phi_{\tau,0})}$$

$$\Rightarrow \tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\approx\frac{\pi}{2}-n\pi+ArcTan\left(\frac{1}{X_0}\right)+\frac{z^2}{4\tau\sqrt{(1+\tau^2)}}\frac{X_1}{(1+X_0{}^2)}\quad\Rightarrow 1+X_0{}^2=\frac{1}{Sin^2(\Phi_{\tau,0})}$$

$$X_1=\frac{\tau\, Sin(\Phi_{\tau,1}-\Phi_{\tau,0})+2Cos(\Phi_{\tau,1}-\Phi_{\tau,0})}{Sin^2(\Phi_{\tau,0})}\Rightarrow\frac{X_1}{(1+X_0{}^2)}=\tau\, Sin(\Phi_{\tau,1}-\Phi_{\tau,0})+2Cos(\Phi_{\tau,1}-\Phi_{\tau,0})$$

$$\Rightarrow \tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\approx\frac{\pi}{2}-n\pi+\Phi_{\tau,0}+\frac{z^2\{\tau\, Sin(\Phi_{\tau,1}-\Phi_{\tau,0})+2Cos(\Phi_{\tau,1}-\Phi_{\tau,0})\}}{4\tau\sqrt{(1+\tau^2)}}$$

$$\Phi_{\tau,1}-\Phi_{\tau,0}=ArcTan(\tau)\Rightarrow Sin(ArcTan(\tau))=\frac{\tau}{\sqrt{(1+\tau^2)}}\quad Cos(ArcTan(\tau))=\frac{1}{\sqrt{(1+\tau^2)}}$$

$$\Rightarrow \tau\, Sin(\Phi_{\tau,1}-\Phi_{\tau,0})+2Cos(\Phi_{\tau,1}-\Phi_{\tau,0})=\frac{\tau^2+2}{\sqrt{(1+\tau^2)}}$$

$$\Rightarrow \tau\, Log\left(\frac{z}{2}\right)\approx\Phi_{\tau,0}+\frac{\pi}{2}-n\pi+\frac{z^2}{4\tau}\frac{2+\tau^2}{1+\tau^2}\Rightarrow Log\left(\frac{z}{2}\right)\approx\frac{\Phi_{\tau,0}+\frac{\pi}{2}-n\pi}{\tau}+\frac{z^2}{4\tau^2}\frac{2+\tau^2}{1+\tau^2}$$

$$\Rightarrow z\approx 2e^{\frac{\Phi_{\tau,0}+\frac{\pi}{2}-n\pi}{\tau}}\left(1+\frac{z^2}{4\tau}\frac{2+\tau^2}{1+\tau^2}\right)\Rightarrow z\approx 2e^{\frac{\Phi_{\tau,0}+\frac{\pi}{2}-n\pi}{\tau}}\left(1+\frac{2+\tau^2}{\tau^2(1+\tau^2)}e^{2\frac{\Phi_{\tau,0}+\frac{\pi}{2}-n\pi}{\tau}}\right)$$

.

Zéros en argument de la fonction de Bessel K d'ordre imaginaire quelconque

La fonction K-Bessel possède le développement en série valable partout sur le plan complexe

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2Sinh(\nu\pi)}\left\{\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{1}{l!(1-\nu)_l}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l}-\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{1}{l!(1+\nu)_l}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l}\right\}$$

$$Avec\quad (1-\nu)_l=\frac{\Gamma(1-\nu+l)}{\Gamma(1-\nu)}=(l-\nu)(l-1-\nu)\cdots(1-\nu)\quad (1-\nu)_0=1\quad (1-\nu)_1=1=(1-\nu)$$

$$Et\quad (1+\nu)_l=\frac{\Gamma(1+\nu+l)}{\Gamma(1+\nu)}=(l+\nu)(l-1+\nu)\cdots(1+\nu)\quad (1+\nu)_0=1\quad (1+\nu)_1=1=(1+\nu)$$

Trouver les zéros c'est par exemple résoudre l'équation transcendantale suivante :

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{1}{l!(1-\nu)_l}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l}=\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{1}{l!(1+\nu)_l}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu}=\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\frac{\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{1}{l!(1-\nu)_l}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l}}{\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{1}{l!(1+\nu)_l}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l}}$$

Zéros de la fonction Bessel-K lorsque |z| <<1 : en deuxième approximation

En deuxième approximation en ne retenant à chaque fois que les deux premiers termes de la série :

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu}\approx\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\frac{1+\frac{z^2}{4(1-\nu)}}{1+\frac{z^2}{4(1+\nu)}}\approx\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\left(1+\frac{z^2}{4}\left(\frac{1}{1-\nu}-\frac{1}{1+\nu}\right)\right)\approx\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\left(1+\frac{\nu}{2(1-\nu^2)}z^2\right)$$

$$2\nu Log\left(\frac{z}{2}\right)\approx-2n\pi i+Log\left(\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\right)+Log\left(1+\frac{\nu}{2(1-\nu^2)}z^2\right)\approx-2n\pi i+Log\left(\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\right)+\frac{\nu}{2(1-\nu^2)}z^2$$

$$\Rightarrow Log\left(\frac{z}{2}\right)\approx\frac{Log\left(\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\right)-2n\pi i}{2\nu}+\frac{z^2}{4(1-\nu^2)}\Rightarrow\frac{z}{2}\approx e^{\frac{Log\left(\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\right)-2n\pi i}{2\nu}+\frac{z^2}{4(1-\nu^2)}}$$

$$\Rightarrow z\approx 2e^{\frac{Log\left(\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\right)-2n\pi i}{2\nu}}\left(1+\frac{z^2}{4(1-\nu^2)}\right)\approx e^{\frac{Log\left(\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\right)-2n\pi i}{2\nu}}\left(1+\frac{e^{2\frac{Log\left(\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\right)-2n\pi i}{2\nu}}}{(1-\nu^2)}\right)$$

On retrouve le résultat de Dunster en prenant un ordre purement imaginaire :

$$\nu=i\tau\quad \Phi_{\tau,0}=\frac{1}{2i}Log\left(\frac{\Gamma(1+i\tau)}{\Gamma(1-i\tau)}\right)=Arg(1+i\tau)$$

$$\Rightarrow z_n=x_n\approx 2e^{\frac{\frac{1}{2i}Log\left(\frac{\Gamma(1+i\tau)}{\Gamma(1-i\tau)}\right)-n\pi}{\tau}}\left(1+\frac{e^{2\frac{\frac{1}{2i}Log\left(\frac{\Gamma(1+i\tau)}{\Gamma(1-i\tau)}\right)-n\pi}{\tau}}}{(1+\tau^2)}\right)\approx 2e^{-\frac{n\pi-\Phi_{\tau,0}}{\tau}}\left(1+\frac{e^{-2\frac{n\pi-\Phi_{\tau,0}}{\tau}}}{(1+\tau^2)}\right)$$

<u>Zéros en argument de la dérivée première de la fonction de Bessel K d'ordre imaginaire quelconque</u>

La fonction K-Bessel possède le développement en série valable partout sur le plan complexe

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2Sinh(\nu\pi)}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{1}{l!(1-\nu)_l}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l-\nu}-\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{1}{l!(1+\nu)_l}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+\nu}\right\}$$

$$\Rightarrow K_\nu'(z)=\frac{\pi}{2Sinh(\nu\pi)}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{2l-\nu}{l!(1-\nu)_l}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l-\nu-1}-\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{2l+\nu}{l!(1+\nu)_l}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+\nu-1}\right\}$$

Trouver les zéros c'est par exemple résoudre l'équation transcendantale suivante :

$$\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{2l-\nu}{l!(1-\nu)_l}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l-\nu-1}=\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{2l+\nu}{l!(1+\nu)_l}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+\nu-1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{2l-\nu}{l!(1-\nu)_l}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l-\nu}=\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{2l+\nu}{l!(1+\nu)_l}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+\nu}\Leftrightarrow\left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu}=\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\frac{\displaystyle\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{2l-\nu}{l!(1-\nu)_l}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l}}{\displaystyle\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{2l+\nu}{l!(1+\nu)_l}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l}}.$$

<u>Zéros de la dérivée première de la a fonction Bessel-K lorsque |z| <<1 :</u> en deuxième approximation en ne retenant à chaque fois que les deux premiers termes de la série :

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu}\approx\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\frac{(-\nu)+\frac{z^2(2-\nu)}{4(1-\nu)}}{(\nu)+\frac{z^2(2+\nu)}{4(1+\nu)}}\approx-\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\frac{1-\frac{z^2(2-\nu)}{4\nu(1-\nu)}}{1+\frac{z^2(2+\nu)}{4\nu(1+\nu)}}\approx-\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\left(1-\frac{z^2}{4\nu}\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}+\frac{2+\nu}{1+\nu}\right)\right)\approx$$

$$\approx-\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\left(1-\frac{z^2}{4\nu(1-\nu^2)}((2-\nu)(1+\nu)+(2+\nu)(1-\nu))\right)\approx-\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\left(1-\frac{z^2(2-\nu^2)}{2\nu(1-\nu^2)}\right)$$

$$\Rightarrow 2\nu Log\left(\frac{z}{2}\right)\approx i\pi-2n\pi\, i+Log\left(\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\right)+Log\left(1-\frac{z^2(2-\nu^2)}{2\nu(1-\nu^2)}\right)\approx i\pi-2n\pi\, i+Log\left(\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\right)-\frac{z^2(2-\nu^2)}{2\nu(1-\nu^2)}$$

$$\Rightarrow Log\left(\frac{z}{2}\right)\approx\frac{i\pi-2n\pi\, i+Log\left(\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\right)}{2\nu}-\frac{z^2(2-\nu^2)}{4\nu^2(1-\nu^2)}\Rightarrow\frac{z}{2}\approx e^{\frac{i\pi-2n\pi\, i+Log\left(\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\right)}{2\nu}-\frac{z^2(2-\nu^2)}{4\nu^2(1-\nu^2)}}$$

$$\Rightarrow z\approx 2e^{\frac{i\pi-2n\pi\, i+Log\left(\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\right)}{2\nu}}\left(1-\frac{z^2(2-\nu^2)}{4\nu^2(1-\nu^2)}\right)\approx 2e^{\frac{i\pi-2n\pi\, i+Log\left(\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\right)}{2\nu}}\left(1-e^{2\frac{i\pi-2n\pi\, i+Log\left(\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\right)}{2\nu}}\frac{(2-\nu^2)}{\nu^2(1-\nu^2)}\right)$$

On retrouve le résultat du cas purement imaginaire :

$$z \approx 2e^{\frac{i\pi - 2n\pi i + Log\left(\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\right)}{2\nu}}\left(1 - e^{2\frac{i\pi - 2n\pi i + Log\left(\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\right)}{2\nu}}\frac{(2-\nu^2)}{\nu^2(1-\nu^2)}\right)$$

$$\nu = i\tau \quad \Phi_{\tau,0} = \frac{1}{2i}Log\left(\frac{\Gamma(1+i\tau)}{\Gamma(1-i\tau)}\right) = Arg(1+i\tau)$$

$$\Rightarrow z_n = x_n \approx 2e^{\frac{\frac{\pi}{2} - n\pi + \frac{1}{2i}Log\left(\frac{\Gamma(1+i\tau)}{\Gamma(1-i\tau)}\right)}{\tau}}\left(1 + e^{2\left\{\frac{\pi}{2} - n\pi + \frac{1}{2i}Log\left(\frac{\Gamma(1+i\tau)}{\Gamma(1-i\tau)}\right)\right\}}\frac{(2+\tau^2)}{\tau^2(1+\tau^2)}\right) \approx 2e^{\frac{\Phi_{\tau,0} + \frac{\pi}{2} - n\pi}{\tau}}\left(1 + \frac{2+\tau^2}{\tau^2(1+\tau^2)}e^{2\frac{\Phi_{\tau,0} + \frac{\pi}{2} - n\pi}{\tau}}\right)$$

Tableaux synoptiques des méthodes de résolution et de construction des solutions pour une géométrie paraboloïdale de révolution

Dans ce qui suit je tente de dresser tous les types de problèmes aux limites rencontrés dans ce document en terme de type de conditions aux limites, de configuration géométrique sur les domaines de valeurs et de méthodes de construction employée. Cela permet de visualiser la grande richesse de problèmes rencontrées en général pour l'équation de Laplace notamment.

Type de condition aux limites	Domaine de variable μ	Domaine de variable v	Domaine de variable φ	Type de construction des solutions du problème aux limites
Dirichlet ou Neumann	$[0,\mu_0]$ homogène	$[0,v_0]$ inhomogène	$[0,2\pi]$	Série de valeurs propres discrètes
Dirichlet ou Neumann	$[0,\mu_0]$ inhomogène	$[0,v_0]$ homogène	$[0,2\pi]$	Série de valeurs propres discrètes
Dirichlet ou Neumann	$[0,\mu_0]$ inhomogène	$[0,v_0]$ inhomogène	$[0,2\pi]$	Série de valeurs propres discrètes
Dirichlet ou Neumann	$[\mu_1,\mu_2]$ homogène	$[v_1,v_2]$ inhomogène	$[0,2\pi]$	Série de valeurs propres discrètes
Dirichlet ou Neumann	$[\mu_1,\mu_2]$ inhomogène	$[v_1,v_2]$ homogène	$[0,2\pi]$	Série de valeurs propres discrètes
Dirichlet ou Neumann	$[\mu_1,\mu_2]$ inhomogène	$[v_1,v_2]$ inhomogène	$[0,2\pi]$	Série de valeurs propres discrètes
Dirichlet ou Neumann	$[0,\mu_0]$ homogène	$[v_1,v_2]$ inhomogène	$[0,2\pi]$	Série de valeurs propres discrètes
Dirichlet ou Neumann	$[0,\mu_0]$ inhomogène	$[v_1,v_2]$ homogène	$[0,2\pi]$	Série de valeurs propres discrètes
Dirichlet ou Neumann	$[0,\mu_0]$ inhomogène	$[v_1,v_2]$ inhomogène	$[0,2\pi]$	Série de valeurs propres discrètes
Dirichlet ou Neumann	$[\mu_1,\mu_2]$ homogène	$[0,v_0]$ inhomogène	$[0,2\pi]$	Série de valeurs propres discrètes
Dirichlet ou Neumann	$[\mu_1,\mu_2]$ inhomogène	$[0,v_0]$ homogène	$[0,2\pi]$	Série de valeurs propres discrètes
Dirichlet ou Neumann	$[\mu_1,\mu_2]$ inhomogène	$[0,v_0]$ inhomogène	$[0,2\pi]$	Série de valeurs propres discrètes
Dirichlet	$[\mu_0,+\infty]$ homogène	$[v_0,+\infty]$ inhomogène	$[0,2\pi]$	Série de valeurs propres discrètes
Dirichlet	$[\mu_0,+\infty]$ inhomogène	$[v_0,+\infty]$ homogène	$[0,2\pi]$	Série de valeurs propres discrètes
Dirichlet	$[\mu_0,+\infty]$ inhomogène	$[v_0,+\infty]$ inhomogène	$[0,2\pi]$	Série de valeurs propres discrètes
Dirichlet ou Neumann	$[\mu_0,+\infty]$ inhomogène	$[0,v_0]$ homogène	$[0,2\pi]$	Série de valeurs propres discrètes
Dirichlet ou Neumann	$[0,\mu_0]$ homogène	$[v_0,+\infty]$ inhomogène	$[0,2\pi]$	Série de valeurs propres discrètes
Dirichlet ou Neumann	$[\mu_0,+\infty]$ inhomogène	$[v_1,v_2]$ homogène	$[0,2\pi]$	Série de valeurs propres discrètes
Dirichlet ou Neumann	$[\mu_1,\mu_2]$ homogène	$[v_0,+\infty]$ inhomogène	$[0,2\pi]$	Série de valeurs propres discrètes
Dirichlet	$[0,\mu_0]$ inhomogène	$[0,+\infty]$	$[0,2\pi]$	Transformée de Hankel
Dirichlet	$[0,+\infty]$	$[0,v_0]$ inhomogène	$[0,2\pi]$	Transformée de Hankel
Dirichlet	$[\mu_0,+\infty]$ inhomogène	$[0,+\infty]$	$[0,2\pi]$	Transformée de Hankel
Dirichlet	$[0,+\infty]$	$[v_0,+\infty]$ inhomogène	$[0,2\pi]$	Transformée de Hankel
Dirichlet ou Neumann	$[\mu_0,+\infty]$ inhomogène	$[v_0,+\infty]$ homogène	$[0,2\pi]$	Transformée de Weber-Orr, Dirichlet ou Neumann
Dirichlet ou Neumann	$[\mu_0,+\infty]$ homogène	$[v_0,+\infty]$ inhomogène	$[0,2\pi]$	Transformée de Weber-Orr, Dirichlet ou Neumann
Dirichlet ou Neumann	$[\mu_0,+\infty]$ homogène	$[0,v_0]$ inhomogène	$[0,2\pi]$	Transformée de Weber-Orr, Dirichlet ou Neumann
Dirichlet ou Neumann	$[0,\mu_0]$ inhomogène	$[v_0,+\infty]$ homogène	$[0,2\pi]$	Transformée de Weber-Orr, Dirichlet ou Neumann
Dirichlet ou Neumann	$[0,+\infty]$	$[v_1,v_2]$ inhomogène	$[0,2\pi]$	Transformée de Hankel
Dirichlet ou Neumann	$[\mu_1,\mu_2]$ inhomogène	$[0,+\infty]$	$[0,2\pi]$	Transformée de Hankel
Dirichlet ou Neumann	$[\mu_0,+\infty]$ homogène	$[v_1,v_2]$ inhomogène	$[0,2\pi]$	Transformée de Weber-Orr, Dirichlet ou Neumann
Dirichlet ou Neumann	$[\mu_1,\mu_2]$ inhomogène	$[v_0,+\infty]$ homogène	$[0,2\pi]$	Transformée de Weber-Orr, Dirichlet ou Neumann

Type de condition aux limites	Domaine de variable μ	Domaine de variable ν	Domaine de variable φ	Type de construction des solutions du problème aux limites
Dirichlet ou Neumann	*$[0,\mu_0]$ inhomogène ou homogène*	*$[0,\nu_0]$ inhomogène ou homogène*	*$[0,\varphi_0]$ homogène*	*Série de valeurs propres discrètes*
Dirichlet ou Neumann	*$[0,\mu_0]$ inhomogène ou homogène*	*$[\nu_1,\nu_2]$ inhomogène ou homogène*	*$[0,\varphi_0]$ homogène*	*Série de valeurs propres discrètes*
Dirichlet ou Neumann	*$[\mu_1,\mu_2]$ inhomogène ou homogène*	*$[0,\nu_0]$ inhomogène ou homogène*	*$[0,\varphi_0]$ homogène*	*Série de valeurs propres discrètes*
Dirichlet ou Neumann	*$[0,\mu_0]$ homogène*	*$[0,\nu_0]$ homogène*	*$[0,\varphi_0]$ inhomogène*	*Pas de solution trouvée*
Dirichlet ou Neumann	*$[\mu_1,\mu_2]$ homogène*	*$[0,\nu_0]$ homogène*	*$[0,\varphi_0]$ inhomogène*	*Pas de solution trouvée*
Dirichlet ou Neumann	*$[0,\mu_0]$ homogène*	*$[\nu_1,\nu_2]$ homogène*	*$[0,\varphi_0]$ inhomogène*	*Pas de solution trouvée*
Dirichlet ou Neumann	*$[\mu_1,\mu_2]$ inhomogène ou homogène*	*$[\nu_1,\nu_2]$ inhomogène ou homogène*	*$[0,\varphi_0]$ inhomogène ou homogène*	*Série de valeurs propres discrètes*
Dirichlet ou Neumann	*$[0,+\infty]$*	*$[0,\nu_0]$ inhomogène*	*$[0,\varphi_0]$ homogène*	*Série discrète (valeurs propres azimutales) de transformées de Hankel*
Dirichlet ou Neumann	*$[0,+\infty]$*	*$[\nu_0,+\infty]$ inhomogène*	*$[0,\varphi_0]$ homogène*	*Série discrète (valeurs propres azimutales) de transformées de Hankel*
Dirichlet ou Neumann	*$[0,+\infty]$*	*$[\nu_1,\nu_2]$ inhomogène*	*$[0,\varphi_0]$ homogène*	*Série discrète (valeurs propres azimutales) de transformées de Hankel*
Dirichlet ou Neumann	*$[0,\mu_0]$ inhomogène*	*$[0,+\infty]$*	*$[0,\varphi_0]$ homogène*	*Série discrète (valeurs propres azimutales) de transformées de Hankel*
Dirichlet ou Neumann	*$[\mu_0,+\infty]$ inhomogène*	*$[0,+\infty]$*	*$[0,\varphi_0]$ homogène*	*Série discrète (valeurs propres azimutales) de transformées de Hankel*
Dirichlet ou Neumann	*$[\mu_1,\mu_2]$ inhomogène*	*$[0,+\infty]$*	*$[0,\varphi_0]$ homogène*	*Série discrète (valeurs propres azimutales) de transformées de Hankel*
Dirichlet ou Neumann	*$[\mu_0,+\infty]$ inhomogène*	*$[0\ ,\nu_0]$ homogène*	*$[0,\varphi_0]$ homogène*	*Série de valeurs propres discrètes*
Dirichlet ou Neumann	*$[\mu_0,+\infty]$ inhomogène*	*$[\nu_1,\nu_2]$ homogène*	*$[0,\varphi_0]$ homogène*	*Série de valeurs propres discrètes*
Dirichlet ou Neumann	*$[0\ ,\mu_0]$ homogène*	*$[\nu_0,+\infty]$ inhomogène*	*$[0,\varphi_0]$ homogène*	*Série de valeurs propres discrètes*
Dirichlet ou Neumann	*$[\mu_1,\mu_2]$ homogène*	*$[\nu_0,+\infty]$ inhomogène*	*$[0,\varphi_0]$ homogène*	*Série de valeurs propres discrètes*
Dirichlet ou Neumann	*$[\mu_0,+\infty]$ homogène*	*$[0\ ,\nu_0]$ inhomogène*	*$[0,\varphi_0]$ homogène*	*Série discrète (valeurs propres azimutales) de transformées de Weber-orr Dirichlet ou Neumann*
Dirichlet ou Neumann	*$[\mu_0,+\infty]$ homogène*	*$[\nu_1,\nu_2]$ inhomogène*	*$[0,\varphi_0]$ homogène*	*Série discrète (valeurs propres azimutales) de transformées de Weber-orr Dirichlet ou Neumann*